ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Ш.ЕСЕНОВ АТЫНДАҒЫ КАСПИЙ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖӘНЕ ИНЖИНИРИНГ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСЫ

М.Р. КУЛИМАНОВА

МАТЕМАТИКА

ТЕХНИКАЛЫҚ МАМАНДЫҚТАР ҮШІН
Оқу құралы

Ақтау 2011

ӘОЖ 510 (075.8)
ББК 22.1я73
К 83

Пікір берушілер: Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті профессоры, ф.-м.ғ.д. С.Т. Мұхамбетжанов

Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университеті профессоры, ф-м.ғ.к. М.Ш. Тілепиев

Алматы энергетика және байланыс институтының доценті, ф-м.ғ.к. М.Ж. Байсалова

Кулиманова М.Р.
К 83

Математика (техникалық мамандықтар үшін): Оқу құралы / М.Р. Кулиманова - Ақтау, Ш.Есенов атындағы КМТжИУ, 2011. - 115б.

ISBN 978-601-226-124-0

Бұл оқу құралы Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінде оқитын техникалық мамандықтар үшін «Математика» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 510 (075.8)
ББК 22.1я73

Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және инжиниринг университетінің Оқу-әдістемелік Кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылды

ISBN 978-601-226-124-0

КІРІСПЕ

Бүгінгі таңда ғылым мен техника саласында зерттеу мен жобалаудың математикалық әдістерінің ролі артып келеді. Әсіресе, ғылымға есептеу техникасының кеңінен енгізілуі математиканың нақтылы есептерді шығаруда қолдану мүмкіндігін арттырып отыр.

Ғылым мен техниканың, ЭЕМ-нің қарқынды дамуы мамандар жұмыстарының барысында кездесетін есептердің барлығын шеше алатын дайын әдістері бар бакалаврлар даярлау мүмкін болмай бара жатыр.

Қазіргі заманға сай студенттердің математикалық білімдеріне қойылып отырған жаңа талаптарға байланысты, математиканы оқыту мәселесіне ең алдымен мына міндеттерді жүктейді; іргелі математикалық дайындық деңгейін көтеру; математика курсының қолданбалы бағытын күшейту; қолданбалы есептерді шығару кезінде студенттерге математикалық әдістерді пайдалануды үйрету; оқыту барысында студенттердің логикалық және алгоритмдік ойлау қабілетінің дамуына көмектесу, өздігінен математикалық білімін кеңейтуіне және тереңдетуіне ынталы болуына қол жеткізу.

Математиканың дәрістерінде бүкіл пәнді және қарастырылып отырған мәселені түсінуге қажетті ең керекті тараулар мен тақырыптар баяндалады. Дәріс материалдарына математиканы дамытудағы ғалымдардың қосқан еңбегі туралы ақпараттар енеді, қазіргі заман тенденциясы және оны дамыту жолдары көрсетіледі. Жеке жағдайларда, теореманы дәлелдеу немесе, оның мазмұнын түсіндіру мен қолданылуын көрсетумен ғана шектелу мәселесін кафедра шешеді.

Жаттығу сабақтарында студенттер математикалық есептерді шешудің негізгі әдістері мен тәсілдерін үйренеді, сол сияқты, оларға қажетті теориялық түсініктемелер беріледі. Жаттығу сабақтарының студенттерге арнаулы курстарды оқыту кезінде және кейін маман ретінде жұмыс істеу барысында маңызы өте зор.

І БӨЛІМ

Тақырып 1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар, олардың қасиеттері. n – ретті анықтауыштар. Алгебралық толықтауыштар және минорлар

Анықтама. *Екінші ретті анықтауыштар* деп $\Delta = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$ санын айтамыз, ол мына таңбамен белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

мұндағы $a_{ij}\,(i = 1,2,\ j = 1,2)$ сандары екінші ретті анықтауыштардың элементтері.

Анықтама. *Үшінші ретті анықтауыштар* деп

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

санын айтамыз және ол мына таңбамен белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Үшінші ретті анықтауыштарты есептеу үшін *үшбұрыштар* немесе *Саррюс* ережесі қолданылады.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ - бұл n- ретті анықтауыш.

Анықтауыштың мынадай қасиеттері бар:

1^0. Анықтауышты транспонирлегеннен анықтауыштың мәні өзгермейді, яғни $|A| = |A^T|$.

2^0. Анықтауыштың кез-келген екі жатық (тік) жолдарының сәйкес элементтерінің орнын алмастырсақ, онда оның таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

3^0. Анықтауыштың кез-келген екі жатық (тік) жолдарының барлық сәйкес элементтері және пропорционал тең болса, онда оның мәні нөлге тең.

4^0. Анықтауыштың кез келген бір жатық (тік) жолының ортақ көбейткішін оның алдына шығаруға болады.

5^0. Анықтауыштың қандай да бір жатық (тік) жолының элементтері екі қосылғыштан тұрса, онда ол анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең.

6^0. Анықтауыштың кез-келген жатық (тік) жолының барлық элементтерін k санына көбейтіп, оны келесі бір жатық (тік) жолының элементтеріне қоссақ, онда оның мәні өзгермейді.

Минор және алгебралық толықтауыш

Анықтама. n – ретті анықтауыштың a_{ij} *элементінің* M_{ij} *миноры* деп, осы анықтауыштың i жатық, j тік жолдарынсыз алынған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз.

Егер $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ болса, онда $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$,

Анықтама. Анықтауыштың a_{ij} *элементінің* A_{ij} *алгебралық толықтауышы* деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы a_{ij} элементінің минорын айтамыз, яғни $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 1. Егер анықтауыштың бір тік (жатық) жолының бір элементінен басқа элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыштың мәні осы элементпен оның сәйкес алгебралық толықтауышының көбейтіндісіне тең болады.

Теорема 2. Анықтауыштың кез-келген жатық (тік) жолының элементтерімен оның сәйкес алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең.

Теорема 3. Анықтауыштың кез-келген жатық (тік) жолының элементтері мен осы элементтерге сәйкес келесі жатық (тік) жолының элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең.

Тақырып 2. R^3 үш өлшемді кеңістігі. Векторлар және оларға қолданылатын сызықтық амалдар. Сызықты тәуелсіз векторлар. Базис. Векторды базис бойынша жіктеу. Векторлардың скалярлық, векторлық және аралас көбейтінділері және олардың қасиеттері

Анықтама. Бағытталған кесінді *вектор* деп аталады.Кесіндінің бағыты стрелкамен көрсетіледі. Вектордың әріптік белгіленуінің үстінде стрелка немесе сызықша қойылады. Вектордың басы мен ұшының арақашықтығы оның *ұзындығы* немесе *модулі* немесе *абсолют шамасы* деп аталады. Ол $|\bar{a}|$ немесе $|\overline{AB}|$ деп бейнеленеді.

Анықтама. Вектордың басқы нүктесі мен соңғы нүктесі сәйкес келсе, ол вектор *нөлдік вектор* деп аталады. Бір түзудің немесе параллель түзудің бойында жатқан векторлар *коллинеар* деп аталады. Ендеше, коллинеар, ұзындықтары мен бағыттары бірдей $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар *тең векторлар* деп аталады. Ұзындығы бірге тең вектор *бірлік вектор* немесе *орт* деп аталады. Бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатқан векторлар *компланар* деп аталады.

Векторларға сызықтық амалдар қолдану. Векторларға сызықтық амалдар қатарына векторларды қосу, азайту, және векторды нақты санға көбейту амалдары жатады.

Векторларға сызықтық амалдар қолдану:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$,
2. $\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$.

Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлары үшін ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болатын $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ нақты сандары табылып,

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n = 0$$

теңдігі орындалатын болса, онда ол векторлар *сызықты тәуелді* деп аталады.

Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлары үшін (2.2) теңдік $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ нақты сандарының барлығы нөлге тең болғанда ғана орындалатын болса, ондай векторлар *сызықты тәуелсіз* деп аталады.

Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторларының сызықты комбинациясы, яғни

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$$

теңдігі орындалатын болса, онда $\vec{a}$ *векторы берілген векторлар арқылы жіктелген* деп аталады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі және оның қасиеттері

Нөлдік емес $\bar{a}$ және $\bar{b}$ *векторларының скаляр көбейтіндісі* деп осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең скаляр шаманы айтады және ол $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ немесе $\vec{a} \cdot \vec{b}$ арқылы белгіленеді. Сонымен, анықтама бойынша

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi,$$

мұндағы $\varphi = \left(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}\right)$.

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері:

1^0. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2^0. $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;

3^0. $\bar{a} \cdot \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c}$;

4^0. $\bar{a}^3 = |\vec{a}|^2$;

5^0. $\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0,\ \bar{a} \perp \bar{b} \ \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$;

Теорема. Егер $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлары координаталар арқылы берілген болса, онда олардың скалярлық көбейтіндісі:

$$\vec{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

теңдігімен анықталады.

Скалярлық көбейтіндінің координаттық түрін пайдаланып, олардың арасындағы бұрыштың косинусын мына формула бойынша табамыз:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \quad \text{немесе} \quad \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі және қасиеттері

Нөлдік емес $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының *векторлық көбейтіндісі* деп $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ немесе $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ символымен белгіленген мына үш шартты қанағаттандыратын $\bar{c}$ векторын айтады:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$,

мұндағы $\varphi = \left(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}\right)$.

2. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$

3. $\bar{c}$ векторының бағыты $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары оң жақты үштік болатындай бағытта бағытталған.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1^0 $S = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$.

2^0. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

3^0. $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$. Бұл қасиет екі вектордың *параллельдік шарты.*

4^0. $\forall \lambda \in R$ үшін $\left(\lambda\bar{a} \times \bar{b} = \lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)\right)$.

5^0. $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$.

Теорема. Егер $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ векторлары координаталар арқылы берілген болса, онда олардың векторлық көбейтіндісі

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

теңдігі арқылы өрнектеледі.

Үш вектордың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері

Өзара компланар емес $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының *аралас көбейтіндісі* деп $\bar{a} \times \bar{b}$ векторымен $\bar{c}$ векторыныңскалярлық көбейтіндісіне тең санды айтады. және ол $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}$ түрінде белгіленеді.

Егер $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ және $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ векторлары координаталар арқылы берілген болса, онда олардың аралас көбейтіндісі

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

теңдігі арқылы өрнектеледі.

Теорема. Компланар емес $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі ортақ бас нүктеден шыққан $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларына салынған, егер $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлар үштігі оң жақты болса, онда оң таңбамен, ал $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлар үштігі сол жақты болса, онда теріс алынған параллепипедтің көлеміне тең болады.

Егер $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары компланар болса, онда $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = 0$. Бұл үш вектордың *компланарлық шарты.*

Тақырып 3. Матрица және оларға амалдар қолдану. Кері матрица. Матрица рангі. Екі және үш белгісізді екі және үш сызықтық теңдеулер жүйелері. Крамер ережесі

Анықтама. mxn - ретті *матрица* деп, m-жатық және n-тік жолдардан анықталған тік бұрышты таблицаны айтамыз, ол мына түрде белгіленеді:

$$\grave{A}=\begin{Vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

$A=(a_{ij}), \qquad i=\overline{1,m}, \qquad j=\overline{1,n},$

мұндағы $\grave{a}_{ij}$ - матрицаның элементтері деп аталады, бірінші индекс i матрицаның жатық жолының, ал екінші индекс j - тік жолының нөмерін анықтайды.

Матрицаның түрлері:

1. Егер матрицаның жатық жолының саны тік жолының санына тең болса (m=n), онда ол *квадрат матрица* деп аталады.

2. Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен басқа элементтері нөлге тең болса: $a_{ij}=0,\ i\neq j,\ a_{ii}\neq 0,\ i=j$, онда ол *диагоналды матрица* деп аталады.

3. Егер матрицаның негізгі барлық элементтері нөлге тең болса, онда ол *нөлдік матрица* деп аталады және ол O әрпімен белгіленеді.

4. Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса: $a_{ii}=1,\ i=\overline{1,n}$, онда ол *бірлік матрица* деп аталады және ол Е әрпімен белгіленеді.

5. Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналынан төмен орналасқан немесе жоғары орналасқан элементтері нөлге тең болса, онда ол *үшбұрышты матрица* деп аталады.

6. Егер $a_{ij}=a_{ji},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$ теңдігі орындалса онда ол матрица *симметриялы* деп аталады.

Берілген квадрат А матрицаның анықтауышы немесе детерминанты мына түрде белгіленеді: $\det A$, немесе $|A|$, немесе Δ.

Матрицаларға қосу, азайту, көбейту және санды матрицаға көбейту амалдары орындалды. Бірақ осы аталған амалдар кез келген матрицалар үшін орындалмайды.

1. *Матрицаларды қосу*. Бірдей ретті $A=(a_{ij})$ мен $B=(в_{ij})$ *матрицаларының алгебралық қосындысы* деп сол ретті $C=(c_{ij})$ матрицасын айтамыз: $C=A\pm B$ және оның кез келген элементтері мына формула бойынша анықталады:

$$\tilde{n}_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}, \qquad i=\overline{1,m}, \qquad j=\overline{1,n}.$$

2. *Матрицаны санға көбейту*. Кез келген A матрицаны k санына көбейту деп C матрицаны айтамыз:

$$c_{ij} = ka_{ij}, \qquad i = \overline{1,m}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

3. *Матрицаны матрицаға көбейту*. Берілген mxn - ретті A матрицаның nxp- ретті B матрицаға көбейтіндісі деп, mxp- ретті С матрицаны айтамыз: $C = A \cdot B$ және оның кез келген элементтері мына формула бойынша анықталады:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = \overline{1,m}, \qquad j = \overline{1,k}.$$

А матрицасын В матрицасына көбейту үшін А матрицасының тік жолының саны В матрицасының жатық жолының санына тең болуы керек.

Анықтама. Егер А матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, яғни $|A| \neq 0,$ онда А матрица *ерекше емес матрица* деп аталады, ал егер $|A| = 0$ болса, онда ол *ерекше матрица* деп аталады.

Анықтама. A^{-1} матрица А матрицасының *кері матрицасы* деп аталады, егер $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$
теңдігі орындалса, мұндағы Е - n-ретті бірлік матрица.

Теорема. (кері матрицаның бар болуы туралы). Кез келген квадрат А матрицаның кері A^{-1} матрицасы бар болуы үшін ол матрица ерекше емес $|A| \neq 0,$ матрица болуы қажетті әрі жеткілікті және ол мына формуламен анықталады:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Анықтама. Матрицаның нөлге тең емес минорының ең жоғарғы реті *оның рангісі* деп аталады және ол $rang(A)$ немесе $r(A)$ деп белгіленеді.

Сызықты теңдеулер жүйесі және оларды шешу әдістері

n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

мұндағы a_{ij}- кез келген сандар, x_i - белгісіз шамалар, b_i- бос мүшелер, $i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n}.$

Берілген жүйедегі a_{ij}-осы жүйенің коэффициенттері, ал b_i-бос мүшелері деп аталады.

Берілген сызықты теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған мына матрицаны

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

берілген жүйенің *негізгі матрицасы* деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесінің бос мүшелерін А матрицасының $n+1$ тек жолы етіп алсақ, онда мына матрицаны аламыз:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

бұл матрица берілген жүйенің *кеңейтілген матрицасы* деп аталады.

Анықтама. Егер сызықты теңдеулер жүйесіндегі бос мүшелерінің кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда жүйені *біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесі* деп, ал бос мүшелерінің бәрі нөлге тең болса, онда ол *біртекті сызықты теңдеулер жүйесі* деп аталады.

Анықтама. Егер $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n$ сандар жиыны берілген жүйедегі теңдеулердің бәрін қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны берілген *сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі* деп аталады.

Егер берілген сызықты теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол *үйлесімді жүйе*, ал егер бірде бір шешімі болмаса, онда ол *үйлесімсіз жүйе* деп аталады.

Үйлесімді жүйенің тек бір ғана шешімі немесе бірден көп шешімі бар. Тек бір ғана шешімі бар жүйе *анықталған жүйе* деп аталады. Кем дегенде екі шешімі бар жүйе *анықталмаған жүйе* деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесін шешу әдістері мынадай:

Крамер әдісі.

n белгісізі бар n сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

Егер біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол жүйесінің шешімі Крамер формуласымен анықталады:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i=\overline{1,n}$$

Тақырып 4. n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі. Гаусс-Жордан әдісі. Сызықтық теңдеулер жүйесінің матрицалық түрде жазылуы және оның шешімі

n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

мұндағы a_{ij} - кез келген сандар, x_i - белгісіз шамалар, b_i - бос мүшелер, $i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n}.$

Кронекер – Капелли теоремасы. Біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйенің матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болуы

$$rang(A) = rang(\overline{A})$$

қажетті және жеткілікті.

Кронекер-Капелли теоремасынан мынадай қорытынды аламыз:

1. Егер $rang(A) = rang(\overline{A}) = r = n$ болса, онда берілген жүйенің тек бір ғана шешімі бар;
2. Егер $rang(A) = rang(\overline{A}) = r < n$ болса, онда берілген жүйенің шексіз көп шешімі бар;
3. Егер $rang(A) \neq rang(\overline{A})$ болса, онда берілген жүйенің шешімі болмайды;

Гаусс әдісі. Гаусс әдісі бойынша біртекті емес сызықты теңдеулер жүйедегі теңдеулерге элементар түрлендірулер қолданып, жүйедегі белгісіз шамаларды біртіндеп жою арқылы теңдеулер жүйесін мынадай сатылы теңдеулер жүйесіне келтіреміз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ .... \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Кері матрица әдісі.

Сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазайық:

$$AX = B$$

мұндағы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$

Сызықтық теңдеулер жүйенің шешімін табу үшін осы теңдеудің екі жағын A^{-1} көбейтеміз:

$$A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B$$

мұндағы $A^{-1}A = E$ және $E \cdot X = X$.

Олай болса

$$X = A^{-1}B$$

Бұл формуламен анықталатын шешім берілген жүйенің матрицалық әдіспен шешімі деп аталады.

Тақырып 5. R^3 кеңістігіндегі жазықтықтың теңдеулері. R^2 және R^3 кеңістігіндегі түзулердің теңдеулері (векторлық және координаталық түрлері)

Жазықтықтағы түзулердің теңдеулері.

Жазықтықтағы *түзудің жалпы теңдеуі*:

$$Ax + By + C = 0$$

Түзудің кесінділік теңдеуі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

мұндағы $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$

k бұрыштық коэффициентімен берілген түзудің теңдеуі:

$$y = kx + b$$

мұндағы $k = tg\varphi$, φ бұрышы түзу мен OX осінің оң бағыт жасайтын бұрышы, ал b - бос мүше, түзудің OY осімен қиылысу нүктесінің ординатасы.

Түзудің нормаль теңдеуі:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0$$

мұндағы ρ - координаталар басынан түзуге жүргізілген перпендикулярдың ұзындығы, φ - сол перпендикуляр мен OX осінің оң бағыт жасайтын бұрышы.

Екі $M_1(x_1;y_1)$ және $M_1(x_2;y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ түзулерінің арасындағы сүйір бұрыш мына формуламен анықталады:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

Түзулердің параллельдік шарты: $k_1 = k_2$

Түзулердің перпендикулярлық шарты: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

$M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі d ара қашықтық мынаған тең:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеулері.</u>

Жазықтықтың *жалпы теңдеуі*: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

мұндағы a, b, c - Ox, Oy, Oz осьтерімен жазықтықтың қиылысу нүктелеріне сәйкес кесінділер.

Жазықтықтың параметрлік теңдеуі:
$$\begin{aligned} x &= x_0 + tm_1 + sm_2 \\ y &= y_0 + tn_1 + sn_2 \\ z &= z_0 + tp_1 + tp_2 \end{aligned}$$

Жазықтықтың қалыпты (нормальдық) теңдеуі:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - q = 0, \qquad (q \ge 0)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтықта дейінгі қашықтық:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - бұл *жазықтықтардың параллельдік белгісі.*

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ - бұл *жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі.*

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ жазықтықтарының арасындағы бұрыш:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

<u>Кеңістіктегі түзудің теңдеулері</u>

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

Екі $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Түзудің параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Кеңістіктегі екі айқасқан түзулер арасындағы *бұрыш* деп, сол түзулерге сәйкес параллель түзулер, қиылысқан екі түзу арасындағы бұрышты айтады.

$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ және $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, түзулерінің арасындағы сүйір бұрыш мына формула арқылы табылады:

$$\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}\ .$$

$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ - бұл *түзулердің параллельдік белгісі.*

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ - бұл *түзулердің перпендикулярлық белгісі.*

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының арасындағы сүйір бұрыш мына формула арқылы табылады:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ .$$

$Al+Bm+Cn=0$ - бұл *түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі.*

$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ - бұл *түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі.*

Тақырып 6. Екінші ретті қисықтардың жалпы теңдеуі. Шеңбердің, эллипстің, гиперболаның және параболаның канондық теңдеулері

1. Эллипс.

Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты 2*a* санына тең жазықтық нүктелерінің жиынын *эллипс* деп атайды.

Эллипс теңдеуін таңдап алынған декарттық тік бкрышты координаталар жүйесінде табайық. Жазықтықта эллипс фокустарын $Ғ_1$ және $Ғ_2$ арқылы белгілейік. $Ғ_1$ және $Ғ_2$ нүктелері арқылы $Ғ_1Ғ_2$ түзуін жүргізіп, оң бағытты $Ғ_1$-ден $Ғ_2$ –ге қарай бағытпен белгілейік. Сөйтіп, $Ғ_1Ғ_2$ түзуін x осі деп аламыз. $Ғ_1Ғ_2$ кесіндісін қақ бөліп, оның ортасы арқылы x осіне перпендикуляр y осін жүргіземіз де оң бағытты төменнен жоғары қарай белгілейміз.

Бұл таңдап алынған координаталар жүйесінде фокустар координаталары $Ғ_1$ (-с,0), $Ғ_2$ (с,0) болады.

$M(x,y)$-эллипстің кез келген айнымалы нүктесі дейік. $|F_1M|=r_1$, $|F_2M|=r_2$ болсын. Эллипстің анықтамасы бойынша $r_1+r_2=2a$, мұндағы $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Сонда $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$.

Бұл теңдікті ықшамдау арқылы

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \qquad (1)$$

теңдігін аламыз.

F_1MF_2 үшбұрышынан $|F_1M|+|MF_2|>|F_1F_2|$ болғандықтан, эллипстің $M(x,y)$ нүктесі үшін $2a>2c$ болады. Демек, $a^2-c^2>0$. Сондықтан, $a^2-c^2=b^2$ арқылы белгілейміз. Сонда (1) теңдеу былай жазылады:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

немесе бұл теңдеудің екі жағын да $a^2b^2\neq 0$ бөлсек, онда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

теңдеуін шығарып аламыз.

Эллипстің канондық теңдеуі : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Эллипстің фокустары қашықтығының үлкен осі ұзындығына қатынасына тең санды эллипстің эксцентриситеті деп атайды.

Эллипстің эксцентриситеті: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$

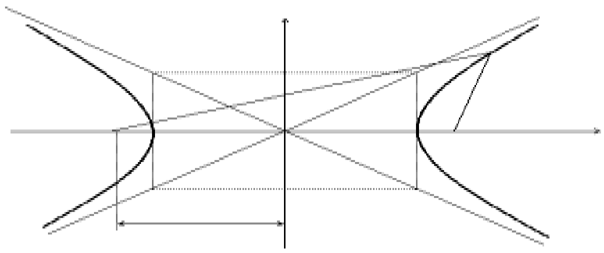
Эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon<1$.

Эллипстің директрисалары мына теңдеумен анықталады**:** $a>b\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$,

$b>a\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$**.**

2. Гипербола.

Фокустары деп аталатын, берілген екі нүктеден қашықтықтары айырымының модулі тұрақты $2a$ санына тең жазықтық нүктелерінің жиынын *гипербола* деп атайды.



Гиперболаның канондық теңдеуі: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 2a осі гиперболаның нақты осі деп аталады, ал 2b- жорамал осі деп аталады. F_1, F_2 –гипербола фокустары: F_1F_2 = 2c.

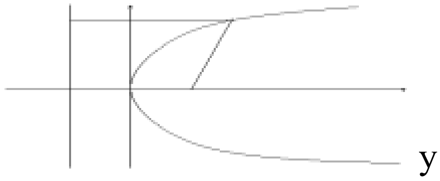
Гиперболаның асимптоталары: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Гиперболаның *эксцентриситеті* : $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$.

Гиперболаның директрисалары мына теңдеумен анықталады**:** $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$**.**

3. Парабола.

Фокусы деп аталатын берілген F нүктесінен және директрисасы деп аталатын, берілген *d* түзуінен тең қашықтықта жатқан жазықтық нүктелері жиынын *парабола* деп атайды.



Параболаның канондық теңдеуі:
$y^2 = 2px$
мұндағы p – параболаның параметрі.
Директрисаның теңдеуі: x = -p/2.

Тақырып 7. Сандық тізбектер. Шек. Функция туралы түсінік. Функцияның шегі. Шегі бар функциялардың қасиеттері. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар.

Шексіз аз шамаларды салыстыру

Сан тізбегі деп N натурал сандар жиынынң R нақты сандар жиынына бейнеленуін айтады. Жиынды мынадай тәсілдермен беруге болады:

1. *Аналитикалық тәсіл.* Бұл тәсілді қолданғанда n нөмірі бойынша тізбектің мүшесін табу үшін формула көрсетіледі.

Мысалы:

1) $x_n = 1 + \frac{1}{2^n};\quad n \in N$. Бұл формула бойынша x_1 =1+1/2 = 3/2, x_2 =1+1/4 = 5/4, …,

Бұл жағдайда $\{x_n\}$ тізбегі $x_n = 1 + \frac{1}{2^n};\quad n \in N$ формуласымен берілген деп атайды.

2) $x_n = 3,\quad n \in N$ Бұл тізбектің барлық мүшелері өзара тең. Мұндай тізбекті тұрақты тізбек деп атайды.

3) Тізбекке тағы мынадай мысалдар келтірейік.

$$\{n\} = \{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\},$$

$$\{\frac{1}{n}\} = \{1, ½, 1/3, ¼, \ldots, 1/n, \ldots\}$$

2. *Рекуррентік тәсіл.* Бұл тәсілде тізбектің бірінші мүшесі беріледі және осы тізбектің белгілі бір немесе бірнеше алғашқы мүшелері бойынша кез келген мүшесін табу үшін формула беріледі.

Әртүрлі сан мәндерді қабылдайтын шаманы *айнымалы шама* деп атайды. Сан мәндері өзгермейтін шаманы *тұрақты шама* деп атайды. Айнымалы шамаларды x,y,z,… деп, ал тұрақты шамаларды a,b,c,.., деп белгілейміз.

Айнымалы шаманың қабылдайтын барлық сан мәндерінің жиынын оның *өзгеру облысы* деп атаймыз.

Анықтама. Егер x айнымалысының қандай да бір облыстан алынған әрбір мәніне келесі бір айнымалы y – тің белгілі бір мәні белгілі бір заңдылықпен сәйкес келіп отырса, онда y айнымалысы x айнымалысының *функциясы* деп аталады. Символды түрде функцияны былай белгілейміз: y=f(x), y=$\varphi(x)$,т.с.с.

Функцияның берілу тәсілдері: аналитикалық, таблицалық, графиктік.

f(x) фунциясы *x=a* нүктесінің маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Егер x_0 санына жинақты кез келген $\{x_n\}$ тізбегі, мұның әрбір элементі $x_n \neq x_0$, үшін *f(x)* функциясы мәндерінің сәйкес $\{f(x_n)\}$ тізбегі А санына жинақты болса, онда А саны $f(x)$ *функциясының* x*-тің* x_0*-ге ұмтылғандағы шегі* деп аталады. Оны былай белгілейміз:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A..$$

Шектер туралы негізгі теоремалар.

$f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының $x \to x_0$ болғанда шектері бар болсын:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A., \qquad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B$$

1. Екі функцияның қосындысы (айырмасының) шегі олардың шектерінің қосындысына (айырмасына) тең:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = A + B$$

2. Функцияның бір шектен артық шегі болмайды.
3. Екі функцияның көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B$$

4. Сондықтан, тұрақты шаманы шек таңбасының алдына шығаруға болады:

$$\lim_{\tilde{o}\to \tilde{o}_0} (Cf(x)) = C \lim_{x\to x_0} f(x) = CA$$

5. Бөлімінің шегі нөлге тең болмаған жағдайда екі фунцияның қатынасының шегі олардың шектерінің қатынасына тең:

$$\lim_{\tilde{o}\to \tilde{o}_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \qquad (\text{B} \neq 0).$$

Анықтама. Егер $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ болса, онда $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда $\alpha(x)$ шексіз аз функция деп аталады.

Шексіз аз функциялардың негізгі қасиеттері:

1^0. Бірнеше шексіз аз функциялардың қосындысы мен көбейтінділері ($\tilde{o} \to \tilde{o}_0$) – да шексіз аз функция болады.

2^0. Шексіз аз функция мен шектелген функцияның көбейтіндісі $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ - да шексіз аз функция болады.

Анықтама. Егер кез келген ε>0 саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)| > \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда *f(x)* функциясын $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда *шексіз үлкен функция* деп атайды және былай белгілейді

$$\lim_{\tilde{o}\to \tilde{o}_0} f(x) = \infty.$$

Шексіз үлкен функциялардың негізгі қасиеттері:

1^0. Бірнеше шексіз үлкен функциялардың қосындысы мен көбейтінділері шексіз үлкен функция болады.

2^0. Шектелген $(0 < f_1(x) < C)$ функция мен шексіз үлкен функциялардың $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ - дағы көбейтіндісі - $f_1 \cdot f$ - шексіз үлкен функция болады.

Шексіз аз функция мен шексіз үлкен функцияның арасында мынадай байланыс бар:

Теорема. Егер $\alpha(x)$ функциясы $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда шексіз аз және $x \neq x_0$ болғанда $\alpha(x) \neq 0$ болса, онда $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ функциясы шексіз үлкен функция болады және керісінше.

Функцияларды салыстыру.

Айталық, $\alpha(x); \beta(x)$ функциялары $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда шексіз аз функциялар болсын.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болса, онда $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда $\alpha(x)$ функциясын $\beta(x)$ функциясына қарағанда реттілігі жоғары шексіз аз функция деп атайды және де $\alpha(x) = 0\beta(x)$ деп белгілейді.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,\ c = cons$ болса, онда $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын реттілігі бірдей *шексіз аз функция* деп атайды .

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ немесе $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ болса, онда $\tilde{o} \to \tilde{o}_0$ жағдайда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары *эквивалентті шексіз аз функциялар* деп атайды да былай белгілейді: $\alpha(x) \cong \beta(x)$.

Тақырып 8. Бірінші және екінші тамаша шектер. Функцияның үзіліссіздігі және оның қасиеттері. Күрделі функцияның шегі және үзіліссіздігі. Бір жақты шектер. Біржақты үзіліссіздік. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері: шенелгендігі, ең үлкен және ең кіші мәндерінің бар болуы, аралық мәндерінің бар болуы

Бірінші тамаша шек деп $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ теңдігін айтады.

Тригонометриялық функциялардан $x \to 0$ кезде шектер табу кезінде бірінші тамаша шек өте жиі қолданылатындықтан одан туатын салдарды дәлелдеуінсіз келтірейік:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1,$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1,$

Мысалдар:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ - бұл екінші тамаша шек деп аталады.

Екінші тамаша шектен туындайтын және басқа да жиі қолданылатын функциялардың шектерін келтірейік.

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (екінші тамаша шектегі $x=\frac{1}{\alpha}$)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$,

3) , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Мысалдар:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot 1=e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^3=e^3.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2=e^2$$

Анықтама. Егер *y = f(x)* функциясы мына жағдайларда x_0 нүктесінде *үзіліссіз* деп аталады:

1. Функция x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болса.
2. Функцияның $x\to x_0$ жағдайда шегі бар болса.
3. Функцияның $x\to x_0$ жағдайдағы шегі функцияның осы нүктедегі мәніне тең болса.

Анықтама. *y = f(x)* функциясы *(a, b)* интервалының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол осы интервалда үзіліссіз деп аталады.

Үзіліссіз функциялардың мынадай қасиеті бар:

Егер f(x) ,g(x) функциялары сан түзуінің бір ғана аралығында беріліп және осы аралыққа тиісті x_0 нүктесінде үзіліссіз болса,онда ол нүктеде мына функциялар да

f(x) +g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), f(x)/g(x)

үзіліссіз болады.

Тақырып 9. Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағынасы. Қосындының, көбейтіндінің және бөлшектің туындысы. Күрделі, кері, кері тригонометриялық, параметрлік және айқын емес функциялардың туындысы

Анықтама. Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, онда сол шекті *функцияның* x *нүктесіндегі туындысы* деп атаймыз. Туындыны былай белгілейміз: $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, яғни

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функцияның туындысын табу амалы функцияны *дифференциалдау* деп аталады.Сонымен анықтамасы бойынша

Геометриялық мағынасы: $y = f(x)$ функциясының $f'(x_0)$ туындысы функция графигіне $(x_0;\ y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең болады.

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

Туындының физикалық мағынасы: $\vartheta(t_0) = S'(t_0)$, яғни t_0 нүктесіндегі жолдың уақыт бойынша туындысы нүктенің t_0 мезгіліндегі жылдамдығын береді.Нүкте қозғалысының орташа жылдамдығы:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

Дифференциалдаудың негізгі ережелері:

С – тұрақты, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - дифференциалданатын функциялар болсын.

1) $C' = 0;$
2) $(Cu)' = Cu';$
3) $(u \pm v)' = u' \pm v';$
4) $(uv)' = u'v + v'u;$
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$
6) $y'_x = y'_u \cdot u'_x,$ егер $y = f(u),$ $u = \varphi(x);$
7) $y'_x = \frac{1}{x'_y},$ егер $y = f(x)$ және $x = \varphi(y).$

Негізгі элементар функциялардың туындылары:

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
2. $\left(e^x\right)' = e^x$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
4. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(shx)' = chx$
16. $(chx)' = shx$
17. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$
18. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Айқын емес функцияның туындысы.

x және y айнымалыларының мәндері:

$$F(x, y) = 0.$$

теңдеуімен байланысты болсын. Егер *D* жиынынан алынған *x* айнымалысының әрбір мәніне *y* айнымалысының осы теңдеуді қанағаттандыратын бір ғана мәні сәйкес келсе, онда бұл теңдеу *y=f(x)* айқын емес функцияны анықтайды .

Айқын емес функцияны дифференциалдау үшін бұл теңдеудің екі жағын да *x* бойынша дифференциалдап, *y*-тің *x*- ке тәуелді екенін ескере отырып, шыққан теңдеуден *y*' туындысын табамыз.

Мысал.

$$2^y - 2y = 1 - x^2$$

$$2^y \ln 2 \cdot y' - 2 \cdot y' = -2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{2 - 2^y \ln 2}.$$

Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы былай табылады.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Тақырып 10. Функция дифференциалы. Қосындының, көбейтіндінің және бөлшектің дифференциалы. Жоғарғы ретті туындылар және дифференциалдар.

Лейбниц формуласы

Анықтама. Функция өсімшесінің функция туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісіне тең, $\Delta \tilde{o}$-қа қарағанда сызықтық бас бөлігі $f'(x)\Delta x$ функциясының дифференциалы деп аталады. Функцияның дифференциалы dy немесе df таңбасымен белгіленді. Аргументтің дифференциалы оның өсімшесіне тең: $dy = \Delta x.$ Олай болса, функцияның дифференциалы: $dy = f'(x)dx.$
Дифференциалдың негізгі қасиеттері:

1.° $dc = 0,$ мұндағы $c = const;$

2.° $d(cu) = cdu;$

3.° $d(u \pm v) = du \pm dv;$

4.° $d(uv) = udv + vdu;$

5.° $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \qquad v \neq 0.$

6.° $d(f(u)) = f'(u)du.$

Функцияның дифференциалы кейбір есептеулерді жуықтап шығару үшін қолданады:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Берілген *y=f(x)* функциясының туындысы $y' = f'(x)$ тәуелсіз айнымалы x – тің функциясы болады. Сондықтан да, осы функцияның туындысы жөнінде сөз қозғауға болады және ол $f'(x)$- *бірінші ретті туынды* деп аталады.

Сонымен, бірінші ретті туындыдан алынған туынды – *екінші ретті туынды* , сол сияқты $(n-1)$ - ші ретті туындыдан алынған туынды – n - ші ретті туынды деп аталады және төмендегі түрде жазылады:

$$y' = f'(x),$$
$$y'' = \left(f'(x)\right)' = f''(x),$$
....
$$y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$$

Жоғарғы ретті туындылар физикада жиі қолданылады. Мысал үшін, егер *y=f(x)* – материалдық нүктенің түзу сызықты қозғалу заңдылығы болса, онда $y' = f'(x)$ - қозғалыстың лездік жылдамдығы болатындығы белгілі, ендеше $y'' = f''(x)$ - x уақыт кезіндегі материалдық нүкте қозғалысының үдеуі болып табылады.
Жоғарғы ретті туындыларға бірнеше мысалдар келтірейік.

1. $y = a^x, (0 < a \neq 1)$ - көрсеткіштік функциясының n- ші ретті туындысын табалық.

$y' = a^x \ln a,$

$y'' = a^x \ln^2 a$,

....

$y^n = a^x \ln^n a$

Дербес жағдайда, $y = e^x$: $y^{(n)} = \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

2. Енді $y = \sin x$; $y = \cos x$ - тригонометриялық функцияларды қарастырайық.

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + \pi),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

....,

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \cos x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Дәл осы сияқты $y = \cos x$ функциясы үшін

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Жоғарғы ретті дифференциалдар. Жоғарғы ретті туындыларға сәйкес, функцияның бірінші ретті дифференциалынан алынған дифференциал – *екінші,* ал екінші дифференциалдан алынған дифференциал – *үшінші,* сол сияқты $(n-1)$ - ші ретті дифференциалдан алынған дифференциал - n- *ші ретті дифференциал* деп аталады. Егер *y=f(x)* функциясының және тәуелсіз айнымалы *x* – тің n- ші ретті туындысы болса, онда $(dx)' = (dx)'' = ... = (dx)^{(n)} = 0$ болғандықтан біртіндеп

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

$$d^2y = d^2 f(x) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = (f''(x)dx + f'(x)dx)')dx = f''(x)dx)^2 = f''(x)dx^2$$

$$d^3y = d^3 f(x) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)'dx = (f'''(x)dx^2 + f''(x)(dx^2)'dx = f''(x)dx)^3$$

....

$$d^n y = d^n f(x) = d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right) = f^{(n)}(x)dx^n$$

теңдіктерін аламыз.

Тақырып 11. Функцияның өсу және кему шарттары. Экстремум нүктелері. Экстремум бар болуының қажетті, жеткілікті шарттары. Жоғары ретті туындының көмегімен функцияны экстремумға зерттеу. Иілу нүктелері.

Анықтама. Егер кез келген $x_1, x_2 \in (a, в)$ үшін $x_1 < x_2$ теңсіздігінен $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ теңсіздігі шығатын болса, онда $f(x)$ функциясы $(\grave{a}, \hat{a})$ аралығында өседі (кемиді) дейді.

Теорема. (*Функция монотондығының жеткілікті шарты*). Егер $(\grave{a},\hat{a})$ аралығында дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы осы аралықта оң (теріс) болса, онда ол $(\grave{a},\hat{a})$ аралығында өседі (кемиді).

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің бір маңайында $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ теңсіздігі орындалатын болса, онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының максимум (минимум) нүктесі деп, ал $f(x_0)$ мәнін $f(x)$ функциясының максимумы (минимумы) деп атайды.

Анықтама. Функцияның максимум және минимум нүктелері функцияның *экстремум нүктелері* деп аталады.

Мысал.

1. $y=x^2$ фукциясының минимум нүктесі $x=0$.
2. $y=-|x-3|$ функциясының максимум нүктесі $x=3$.
3. $y=\sin x$ функциясының минимум нүктесі $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ және максимум нүктесі $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Теорема *(Экстремумның қажетті шарты).* Айталық, $f(x)$ фунуциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталсын. Егер x_0 - экстремум нүктесі болса онда бұл нүктеде $f'(x_0)=0$ немесе туындысы болмайды.

1. $y = x^2$ минимум нүктесі $x = 0$, және $(x^2)' = 2x = 0$; $x = 0$.
2. $y = |x|$ фукциясының минимумы $x = 0$ нүктесінде, бірақ бұл нүктеде туындысы жоқ.

Анықтама. Егер функция x_0 нүктесінің маңайында анықталған және оның туындысы осы нүктеде нөлге тең болса немесе туындысы болмаса, онда бұл нүктені кризистік нүкте деп атаймыз.

Теорема *(Экстремумның жеткілікті шарты)*. Айталық, $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында үзіліссіз болып, дифференциалданатын болса және $f'(x_0)=0$ Сонда:

1) $x < x_0$ *болғанда* $f'(x) > 0$, $x > x_0$ *болғанда* $f'(x) < 0$ онда x_0 нүктесінде функцияның максимумы болады;

2) $x < x_0$ болғанда $f'(x) < 0$, ал $x > x_0$ болғанда $f'(x) > 0$, онда x_0 нүктесінде функцияның минимумы болады.

3) егер $f'(x)$ функциясы x_0 нүктесінде таңбасын өзгертпесе, онда бұл нүкте экстремум нүктесі болмайды.

Теорема. Айталық $f'(x_0) = 0$ және бұл функцияның x_0 нүктесінің маңайында үзіліссіз екінші ретті туындысы бар болса, онда $f''(x_0) < 0$ болғанда бұл нүктеде функцияның максимумы болады, ал $f''(x_0) > 0$, онда – минимум болады.

Анықтама. Егер қисықтың барлық нүктелері $(a;b)$ интервалында жүргізілген кез келген жанама нүктелерінен төмен жатса, онда бұл аралықта *қисық дөңес* деп аталады.

Анықтама. Егер қисықтың барлық нүктелері $(a;b)$ интервалында жүргізілген кез келген жанама нүктелерінен жоғары жатса, онда бұл аралықта *қисық ойыс* деп аталады.

Теорема. Егер *(a;b)* интервалының барлық нүктелерінде $f''(x) < 0$ болса, онда $y = f(x)$ қисығы осы интервалда дөңес болады. Егер *(a;b)* интервалының барлық нүктелерінде $f''(x) > 0$ болса, онда $y = f(x)$ осы интервалда ойыс болады.

Анықтама. Үзіліссіз қисықтың ойыс бөлігін дөңес бөлігінен айырып тұрған нүктені қисықтың иілу нүктесі деп атаймыз.

Теорема *(Иілу нүктесінің қажетті шарты)***.** Егер қисықтың иілуі болтын x_0 нүктесінде $y = f(x)$ функциясының екінші туындысы бар болса, онда бұл нүктеде $f''(x_0) = 0$.

Теорема *(Иілу нүктесінің жеткілікті шарты)***.** Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде екі рет дифференциалданса және осы нүктеден өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда бұл иілу нүктесі болады.

Тақырып 12. Қисықтың асимптоталары. Функция графигін салудың жалпы жобасы

Анықтама. Егер $y = f(x)$ қисығының айнымалы нүктесі мен А түзуінің ара қашықтығы нүкте шексіздікке ұмтылғанда, нөлге ұмтылса, онда А түзуін осы қисықтың *асимптотасы* деп атайды.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{õ\to à+0} f(x) = \infty$ немесе $\lim\limits_{õ\to à-0} f(x) = \infty$ немесе $\lim\limits_{õ\to à} f(x) = \infty$ болса, онда $õ = à$ түзуі $y = f(x)$ функциясы графигінің *вертикаль асимптотасы* деп аталады. Мысалы, $y = \dfrac{1}{õ-4}$ функциясы үшін $õ = 4$ түзуі вертикаль асимптота болады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{õ\to\infty} \dfrac{y}{x} = k,$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = b$ теңдіктері орындалатындай k және b сандары табылатын болса, онда $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының *көлбеу асимптотасы* деп аталады.

Егер $k = 0$ болса, онда $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ болады. Олай болса, $y = b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының *горизонталь асимптотасы* деп аталады.

Функцияны зерттеудің жалпы схемасы қарастырылады.

Мысал: $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ зерттеп, графигін тұрғызамыз.

1. Анықталу облысы: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,\ \lim_{x\to1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,\ \lim_{x\to1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x-1} \neq \pm f(x)$, функция тақ та емес, жұп та емес.

3. $f(x) \neq 0$ *x-ң* ешқандай мәнінде *Ox* осін қимайды. $f(x) < 0$ $x < 1$, $f(x) > 0$ $x > 1$.

4. $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$ $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

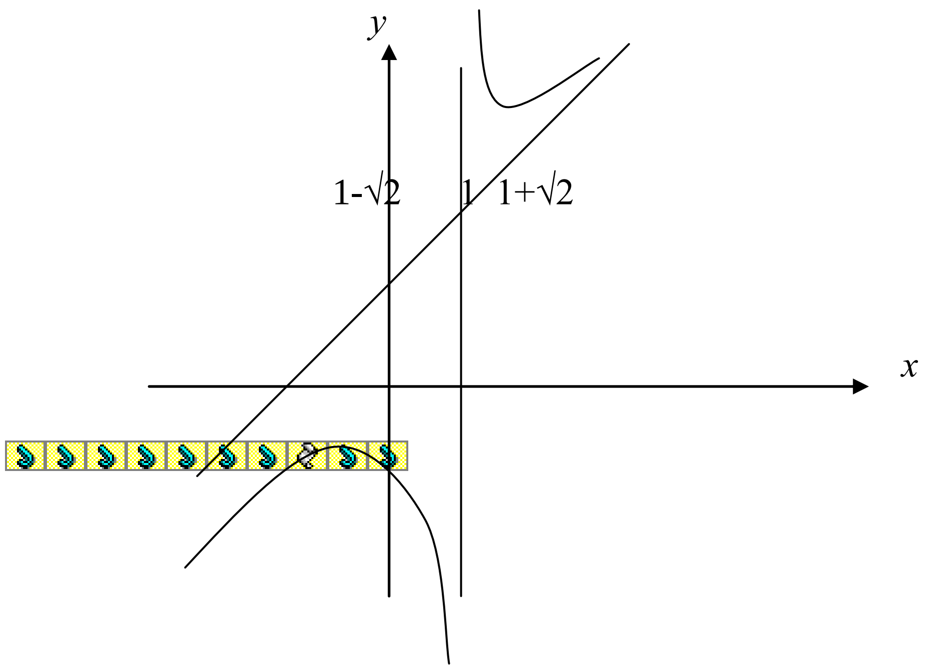
5. $f'(x) < 0$ $x \in (1-\sqrt{2};1) \cup (1;1+\sqrt{2})$ - кему интервалдары; $f'(x) > 0$ $x \in (-\infty;1-\sqrt{2}) \in (1+\sqrt{2};+\infty)$ - өсу интервалы . $x = 1-\sqrt{2}$ болғанда $f'(x)$ таңбасын «+» тан «-», ендеше, $x = 1-\sqrt{2}$ - максимум нүктесі. $x = 1+\sqrt{2}$ $f'(x)$ таңбасын «-»тан «+» өзгертеді, сондықтан, $x = 1+\sqrt{2}$ - минимум нүктесі.

6. $f''(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{4}{(x-1)^3} \neq 0$.

Сондықтан, функцияның иілу нүктесі жоқ. $f''(x) < 0$ егер $x < 1$, $f''(x) > 0$ егер $x > 1$, е $(-\infty;1)$ -- дөңестік , ал $(1;+\infty)$ - ойыстық интервалы.

7. $y = x + 1$ көлбеу асимптота

$y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ - функциясының графигін тұрғызамыз.



Тақырып 13. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл және оның негізгі қасиеттері. Негізгі интегралдар кестесі. Интегралдаудың негізгі әдістері: тікелей интегралдау; айнымалыны ауыстырып интегралдау; бөліктеп интегралдау

Анықтама. Егер [a, b] кесіндісінің кез келген нүктесінде

$$F'(x) = f(x)$$

теңдігі орындалса, онда F(x) функциясы f(x) функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады. Алғашқы функциялардың айырмасы тұрақты санға тең:

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Анықтама. f(x) функциясының алғашқы функцияларының жиынын

$$F(x) + C.$$

осы функцияның *анықталмаған интегралы* деп атаймыз, былай белгілейміз

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

Егер функция бір аралықта үзіліссіз болса, онда осы аралықта оның анықталмаған интегралы бар болады. Қасиеттері.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ мұндағы u, v, w – x- тен тәуелді функциялар..

6. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Мысал. $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Ыңғайлылық үшін көпшілік элементар функциялардың анықталмаған интегралдары мынадай таблицаға жинақталған:

Интеграл		Мәндері	Интеграл		Мәндері
1	$\int tgxdx$	-ln|cosx|+C	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	ln|sinx|+ C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

Интегралдау әдістері:

Айнымалыны ауыстыру.

Теорема. Егер мына интегралды $\int f(x)dx$ есептеу қиын болса, она мынадай алмастыру жасаймыз: $x = \varphi(t)$ және $dx = \varphi'(t)dt$. Сонда:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Мысал. Есептеу керек $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Алмастыру жасаймыз *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Мысал. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

$t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx,\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Орнына қоямыз

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Бөлшектеп интегралдау формуласы.

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Екі жағын да интегралдаймыз, сонда: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$,

$uv = \int udv + \int vdu$ немесе $\int udv = uv - \int vdu$.

Осы формуланы бөлшектеп интегралдау формуласы деп атаймыз.

Мысал. $\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx, \\ du = 2xdx, & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx, \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Мысал. $\int e^{2x}\cos xdx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx, & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx, & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$$

Формуланы екі рет қолданғанда берілген интегралды қайта алдық, оны теңдіктің екінші жағына шығарамыз:

$$5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Тақырып 14. Рационал функцияларды жай бөлшектерге жіктеу арқылы интегралдау

Анықтама. Элементар бөлшектерге мыналар жатады:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натурал сандар ($m \ge 2, n \ge 2$) , $b^2 - 4ac < 0$.

Алғашқы екі түрдегі интегралдар t = ax + b алмастыруы арқылы интегралданады:

I. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$

II. $\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$

III түрдегі интегралды былай түрлендіреміз:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Мысал.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\begin{Bmatrix}u=x+3; & du=dx;\\ x=u-3; & \end{Bmatrix}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

Мысал.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\begin{Bmatrix}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3; & \end{Bmatrix}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

IV типтегі интегралды былай түрлендіреміз:.
M = 0, N = 1.

$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ интегралының бөлімінен толық квадратты айырамыз да, оны мына түрге келтіреміз $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Енді мынадай түрлендіру жасаймыз:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Екінші интегралды бөлшектеп интегралдаймыз.

$$\begin{Bmatrix}dv_1=\frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1=u; \quad du_1=du;\\ v_1=\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}};\end{Bmatrix}$$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Орнына қоямыз:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Алынған формула **рекуррентті деп аталады.** Егер оны n-1 рет қолдансақ, онда, мына интеграл шығады $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Мысал:

$$\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\begin{Bmatrix}u=x-2; & du=dx;\\ x=u+2; & \end{Bmatrix}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\begin{Bmatrix}t=u^2+3;\\ dt=2udu;\end{Bmatrix}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$$

Кез келген рационал функцияны интегралдау элементар рац. Функцияларды интегралдауға келтіріледі.

Теорема. Егер $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - дұрыс рационал бөлшек, бөлімі P(x) мынадай көбейткіштерден тұрады: $P(x) = (x - a)^{□}\dots(x - b)^{□}(x^2 + px + q)^{□}\dots(x^2 + rx + s)^{□}$), онда бұл бөлшек мынадай элементар бөлшектердің қосындысына жіктеледі.

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\dots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\dots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – тұрақты сандар.

Мысал. Есептеңіз.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Шешуі.

$$(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4),$$

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Ортақ бөлімге келтіреміз және алымдарын теңестіреміз:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$\begin{cases}A+B+C=9\\ -4A-2B-6C+D=-30\\ 4A+4B+8C-6D=28\\ -16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\ 2A+2B+4C-3D=14\\ 2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 2A + 2B + 36 - 4A - 4B - 72 + 6A + 12B = 14 \\ 2A + B - 24 + 2A + 4B = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 4A + 5B = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

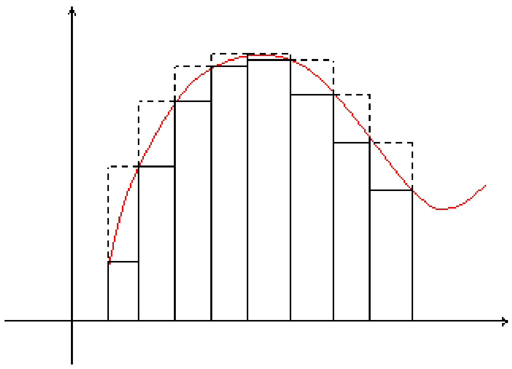
Сонымен:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{2}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

Тақырып 15. Анықталған интеграл және оның негізгі қасиеттері. Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралды есептеу: алмастыру әдісімен және бөліктеп интегралдау

Айталық, [a, b] кесіндісінде үзіліссіз функция f(x) берілсін.



m және M арқылы оның [a, b] кесіндісіндегі ең кіші және ең үлкен мәндерін белгілейік.[a, b] кесіндісін мына нүктелермен

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

бөліктерге бөлейік.Сонда

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \dots ,x_n - x_{n-1} = \Delta x_n;$$

Әр бөліктен функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін табайық..

$$[x_0, x_1] \to m_1, M_1;\ [x_1, x_2] \to m_2, M_2;\ \dots\ [x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n.$$

Қосындылар құрайық:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$\underline{S}$ қосындысы төменгі **интегралдық қосынды,** $\overline{S}$ – жоғарғы **интегралдық қосынды деп атаймыз.**

$m_i \le M_i$, сондықтан $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, ал $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Әр кесіндінің ішінен бір ε_i нүктесін таңдаймыз.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1,\ x_1 < \varepsilon_2 < x_2,\ \dots,\ x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеп, f(x) функциясының [a, b] кесіндісіндегі *интегралдық қосындысы* деп аталатын өрнекті құрамыз.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Сонда: $m_i \Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$

Осы арадан $$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$$

Егер $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, онда $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Анықтама. [a, b] кесіндісін бөліктерге қалай бөлгенде де, ε_i нүктесін қалай таңдап алғанда да, $\max \Delta x_i \to 0$ жағдайында интегралдық қосынды $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ мына S шегіне ұмтылады, сол шекті f(x) функциясының [a, b] кесіндісіндегі анықталған интегралы деп атаймыз былай белгілейміз :

$$\int_a^b f(x)dx$$

a – төменгі шек, b – жоғарғы шек, x – интегралдау айнымалысы, [a, b] – интегралдау кесіндісі. Сонымен анықтамасы бойынша

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

Осы шек бар болғанда f(x) функциясы [a, b] кесіндісінде интегралданады деп аталады.

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема. Егер f(x) функциясы [a, b] кесіндісінде үзіліссіз болса,онда ол осы аралықта интегриралданады.

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1) $$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$$

2) $$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Егер [a, b] аралығында $f(x) \le \Delta\, \varphi(x)$ және $a < b$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

5) Егер m және M – f(x) функциясының [a, b] кесіндісіндегі ең кіші және ең үлкен мәндері болса, онда:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) Орта мән туралы теорема. Егер f(x) функциясы [a, b] кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы кесіндіде ε нүктесі табылып, мына теңдік орындалады

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Кез келген a, b, c сандары үшін мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема. (*Ньютон – Лейбниц теоремасы*)

Егер F(x) – функциясы үзіліссіз f(x) функциясының алғашқы функциясының бірі болса, онда , $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Ньютон – Лейбниц формуласы.

Айнымалыны ауыстыру.

$\int_a^b f(x)dx$ интегралы берілсін. мұндағы f(x) – [a, b] кесіндісінде үзіліссіз функция .

Мына формуламен жаңа айнымалы енгіземіз x = $\varphi(t)$.

Сонда, егер

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ және $\varphi'(t)$ функциялары $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз

3) $f(\varphi(t))$ функциясы $[\alpha, \beta]$аралығында анықталған болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Бөлшектеп интегралдау формуласы.

Егер $u = \varphi(x)$ және $v = \psi(x)$ [a, b] кесіндісінде үзіліссіз функциялар болса, және осы аралықта олардың туындылары да үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Тақырып 16. Анықталған интегралдың геометрияда қолданылуы

Жазық фигураның ауданын есептеу формулалары:

1. y=f(x) қисығымен, OX осімен және x=a , x=b түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы былай табылады:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Егер функцияның графигі Ox осінен төмен жатса, яғни f(x) < 0, онда бұл ауданның таңбасы «-», ал егер функцияның графигі Ox осінен жоғары жатса, яғни f(x) > 0, онда бұл ауданның таңбасы «+» болады.Сондықтан мұндай қисықпен шектелген фигура ауданы былай табылады

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

3. Енді қисық сызықты фигура мынадай сызықтармен шектелсін. $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $f_1(x)<f_2(x)$, x=a, x=b. Бұл жағдайда ауданды мына формуламен есептейміз:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

4. Енді қисық сызықты сектордың ауданын қарастырайық. Ол үшін полярлық координаталар жүйесіндегі қисықты алайық.Секторды сызатын қисықтың бұл жүйедегі үшін теңдеуі $\rho = f(\varphi)$, мұндағы ρ - радиус – вектордың ұзындығы, ал φ - осы радиус – вектордың полярлық осьпен жасайтын бұрышы. Қисық сызықты сектордың ауданы:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$

Енді қисықтың теңдеуі параметрлік түрде берілсін $x = \varphi(t), y = \phi(t) \quad t_1 < t < t_2$

Сонда осындай қисықпен шектелген фигураның ауданы былай табылады:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\varphi'(t)dt$$

Доғаның ұзындығын есептеу.

y= f(x) үзіліссіз қисығын [a, b] кесіндісінде қарастырайық. Осы доғаның ұзындығы

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Егер қисық сызық x = φ(t), y = Ψ(t) параметрлік түрде берілсе, онда қисық ұзындығы

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

Енді қисық полярлық координаталармен $\rho=f(\varphi)$ берілсе, онда

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi$$

Мысал. $x^2 + y^2 = r^2$ теңдеуімен берілген шеңбердің ұзындығын табу керек.

1 -әдіс. Теңдеуден у өрнектейміз. $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Туындысын табамыз.

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Сонда

$$\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}$$

$$S=2\pi r.$$

2 -әдіс. Берілген теңдеуді полярлық түрге көшіреміз: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$,

$$\rho=f(\varphi)=r\ ,\quad \rho'=\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=0,$$

сонда

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+r^2}\,d\varphi=r\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r$$

Дененің көлемін есептеу формуласы: $V=\int_a^b Q(x)dx$

мұндағы Q = Q(x) -көлденең қиманың ауданы.

Мысал. Радиусы R –ге тең шардың көлемін табайық.

Шардың көлденең қимасының радиусы у-ке тең дөңгелек, оны былай өрнектейміз: $\sqrt{R^2-x^2}$.

Сондықтан аудан: Q(x) = $\pi(R^2-x^2)$.

Шардың көлемі:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Айналу денесінің көлемі :

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Айналу денесінің бетінің ауданы

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Тақырып 17. Көп айнымалы функция туралы түсінік. Анықталу облысы, графигі. Функцияның шегі, үзіліссіздігі. Дербес туындылар. Толық дифференциал және оның дербес туындылармен байланысы. Бағыт бойынша туынды, градиент. Айқын емес функциялар. Олардың бар болуы туралы теоремалар. Айқын емес функцияларды дифференциалдау.

Айталық, M_0 кеңістіктің қандай да бір тиянақты нүктесі болсын.Сонда осы нүктенің ε - маңайы деп центрі M_0 нүктесінде жатқан, ал радиусы ε- ға тең болатын шардың барлық ішкі нүктелерінің жиынын айтады. Егер оң ε саны табылып, M нүктесінің ε - маңайы толықтай қалауымызша алынған {M} жиынына тиісті болса, онда M нүктесі кеңістік нүктелерінің {M} жиынының *ішкі нүктесі* деп аталады. Қарсы жағдайда *сыртқы нүктесі* деп аталады.

Егер M нүктесінің кез келген ε - маңайы {M} жиынының ішкі нүктелерін де, сондай-ақ сыртқы нүктелерін де қамтитын болса, онда M нүктесі осы жиынның шекаралық нүктесі деп аталады.Ал барлық шекаралық нүктелер жиыны осы *жиынның шекарасы* деп аталады.

Анықтама. Егер белгілі бір заңдылықпен n - өлшемді $x \in D$нүктесінің әрбір мәніне келесі бір z айнымалысының белгілі бір мәні сәйкес кеіп отырса, онда zайнымалысы $x_1,x_2,...,x_n$ *айнымалыларының функциясы* деп аталады.Былай белгілейміз $z=f(x_1,x_2,\dots x_n)$

Екі аргументті функция үшін айтылған тұжырымдар басқа функциялар үшін орындалады.

Анықтама. Егер өзара тәуелсіз x және y айнымалыларының әрбір қос (x, y) мәніне қандай да бір заңдылықпен басқа бір z айнымалының бір немесе бірнеше мәні сәйкес келіп отырса, онда z айнымалысын осы *екі аргументтің функциясы* деп атаймыз. z = f(x, y) Анықтама. Егер әрбір қос (x, y) мәніне z айнымалысының бір ғана мәні сәйкес келсе, ондай функция бір мәнді деп, ал екі немесе одан да көп мән сәйкес келсе көп мәнді функция деп аталады.

Анықтама. z функциясының *анықталу облысы* деп z функциясын анықтайтын қос (x, y) мәндерінің жиынын айтады.

Анықтама. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің радиусы r – тең маңайы деп мына шартты қанағаттандыратын барлық (x, y) нүктелерінің жиынын айтады

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r.$$

Анықтама. Егер әрбір ε > 0 саны үшін r >0 саны табылып, $MM_0 < r$ шартын қанағаттандыратын кез келген M(x, y), нүктесі үшін мына шарт орындалса $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, онда A санын f(x, y) функциясының M(x, y) нүктесінің $M_0(x_0, y_0)$ ұмтылғандағы шегі деп атаймыз. Былай белгілейміз

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Анықтама. Айталық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі f(x, y) функциясының анықталу облысына кіретін болсын. Сонда, егер

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

орындалса, онда z = f(x, y) функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады.Егер қандай да бір нүктеде бұл шарт орындалмаса , онда функция осы нүктеде үзілісті деп аталады.Ол мына жағайларда болуы мүмкін:

1) z = f(x, y) функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде анықталмаған,.
2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ шегі болмайды.
3) Бұл шек бар, бірақ f(x_0, y_0) –ге тең емес.

Айталық, бір облыста функция z = f(x, y) берілсін. Кез келген M(x, y) нүктесін аламыз да x айнымалысына Δx өсімшесін береміз, ал y –ті тұрақты етіп қалдырамыз.Сонда $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) өрнегі функцияның x бойынша дербес өсімшесі деп аталады.Мына қатынасты қарайық.

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Сонда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ шегі функцияның x бойынша дербес туындысы деп аталадыжәне былай белгіленеді: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Сол сияқты y бойынша дербес туындысы былай анықталады.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$z = x^3 + 3y - 2xy$$

Мысал 1 $. \; z'_x = 3x^2 - 2y$

$$z'_y = 3 - 2x$$

2. $z = \sin^2(3x+2y)$ z'_x, z'_y туындыларын табайық.

$$z'_x = 2\sin(3x+2y)\cos(3x+2y)3 = 3\sin 2(3x+2y),$$
$$z'_y = 2\sin(3x+2y)\cos(3x+2y)2 = 2\sin 2(3x+2y).$$

Функцияның толық өсімшесі және толық дифференциалы.

Анықтама. F(x, y) функциясы үшін мына өрнек Δz = f(x + Δx, y + Δy) – f(x, y).

оның *толық өсімшесі* деп аталады.

Анықтама. $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ өрнегі f(x,y) функциясының толық өсімше деп аталады, мұндағы α_1 және α_2 – Δx → 0 , Δy → 0 шексіз аз функциялар. Функцияның *толық дифференциалы* деп толық өсімшенің мына сызықтық бөлігін айтамыз.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Кез келген көп айнымалының функциясы үшін:

$$df(x,y,z,\ldots,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Айталық функция f(x, y) (x, y) нүктесінде дифференциалданатын болсын.Осы функцияның толық өсімшесін табайық

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta z$$

Осы формулаға мына өрнекті қоятын болсақ

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

мынадай жуықтап есептеу формуласын аламыз

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Мысал. $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$ өнегінің жуық мәнін табу керек $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ x = 1,
y = 2, z = 1.

Шешуі. Мынаны анықтаймыз Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Функцияның мәнін санаймыз u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Функцияның толық дифференциалы:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Бұл өрнектің дәл мәні 1,049275225687319176.

Күрделі функцияның туындысы.

$z = F(u;v)$ теңдеуіндегі u,v айнымалылары x пен y –ке тәуеді функциялар болсын. Яғни $u = \varphi(x;y); v = \phi(x;y)$. Бұл жағдайда z функциясы x пен y-тің күрделі функциясы деп аталады.

$$z = F[\varphi(x;y);\phi(x;y)]$$

Айталық $z = F(u;v)$; $u = \varphi(x;y); v = \phi(x;y)$ функциялары өздерінің барлық аргументтері бойынша дербес туындылары бар функциялар болсын. Сонда $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын қалай есептейміз. Толық өсімшенің мына түрін алайық

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0; \Delta_x u \to 0; \Delta_x v \to 0; \gamma_1 \to 0; \gamma_2 \to 0$$

Осы арадан:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Функцияның толық туындысы.

Енді мынадай функцияны қарастырайық.

z=F(x,y,u,v) , мұндағы аргументтер x –ке тәуелді функциялар болсын. $y=f(x), u=\varphi(x), v=\phi(x)$ сонда берілген функция да x-тің функциясы болады. Ендеше оның x бойынша туындысы былай табылады:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

Бұл – функцияның толық туындысы деп аталады.

Енді күрделі функцияның толық дифференциалын табайық. Ол үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Теңдіктің оң жағына мынадай түрлендірулер жасаймыз:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

Осы арада мынаны ескереміз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv$$

Олай болса:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Алынған формулаларды салыстыра отырып толық дифференциалдың түрі инвариантты екенін байқаймыз.

Тақырып 18. Жоғары ретті дербес туындылар мен толық дифференциалдар.Көп айнымалы функцияның экстремумы.

Егер функция f(x, y) D облысында анықталған және үзіліссіз болса, онда $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ дербес туындылары да осы арада анықталған болады.

Осы функциялардың туындыларын екінші ретті туындылар деп атаймыз.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

Осы процесті қайталау нәтижесінде одан да жоғарғы ретті туындыларды табамыз.

Мына түрдегі $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ т.с.с. дербес туындыларды аралас туындылар деп атаймыз.

Теорема. Егер функция f(x, y) және оның дербес туындылары $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ M(x, y) нүктесінде және оның аймағында анықталған және үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Яғни жоғарғы ретті аралас туындылар дифференциалдау тәртібіне тәуелді емес.Осы сияқты жоғарғы ретті дифференциалды айқындаймыз.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$$

$$d^2z = d\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$$

$$d^3z = f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Мысалдар.

Енді u(x, y, z) функциясын үзіліссіз және үзіліссіз дербес туындыларымен қарастырайық. Сонда ол үшін мынадай теңдік жазуға болады:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – шексіз аздар, $\Delta S \to 0$.

Геометриялық тұрғыдан алғанда:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Сонымен былай жазуға болады:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Мұндағы s шамасы- скаляр. Ол тек $\vec{S}$ векторының бағытын білдіреді.Осы арадан

Анықтама . $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ шегі *u(x, y, z) функциясының* $\vec{S}$ *векторының бағыты бойынша* (x, y, z) *нүктесіндегі туындысы* деп аталады..

Анықтама. Егер D облысында берілген u = u(x, y, z) функциясы үшін координаталары осы функцияның сәйкес нүүктедегі дербес туындыларына яғни $\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}$ тең вектор берілсе, ондай векторды осы *функцияның градиенті* деп атаймыз

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Көп айнымалы функцияның экстремумы.

Анықтама. Егер қандай да бір облыста анықталған $z = f(x, y)$ функциясы үшін $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында мына теңсіздік орындалса,

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

онда M_0 нүктесі *максимум нүктесі* болады.

Анықтама. Егер қандай да бір облыста анықталған $z = f(x, y)$ функциясы үшін $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында мына теңсіздік орындалса,

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

онда M_0 - *минимум нүктесі* болады.

Теорема. *(Экстремумның қажетті шарты).*

Егер $f(x,y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде экстремум қабылдаса,онда бұл нүктеде оның бірінші ретті дербес туындылары нольге тең болады

$f'_x(x_0, y_0) = 0,\quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, немесе ең болмағанда біреуі жоқ болады.

Бұл нүктені (x_0, y_0) кризистік нүкте деп атайды.

Теорема. *(Экстремумның жеткілікті шарты).*

Айталық, (x_0, y_0) нүктесінің маңайында функция $f(x, y)$ –тің үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар ьолсын.Мына өрнекті қарастырамыз:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1) Егер $D(x_0, y_0) > 0$, онда (x_0, y_0) нүктесінде $f(x, y)$ функциясының экстремумы болады, егер

$f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, егер $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Егер $D(x_0, y_0) < 0$, онда (x_0, y_0) нүктесінде функция $f(x, y)$ экстремум мән қабылдамайды.

$D = 0$ болғанда экстремумның бар- жоқтығы туралы тұжырым жасай алмаймыз.

Шартты экстремум. Егер $u = f(x, y)$ функциясына кіретін x және y өзара тәуелді болса, яғни мынадай байланыс болса (x, y) = 0, онда шартты экстремум табылады.Бұл теңдеу - байланыс теңдеуі.

Сонда $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Экстремум нүктелерінде:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

және:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

(2) теңдікті λ санына көбейтіп, (1) теңдікпен қосамыз.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Осы шарт орындалуы үшін анықталмаған λ коэффициентін мына үш теңдеулер жүйесі орындалатындай етіп табамыз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

Бұлар шартты экстремумның қажетті шарттары, бірақ жеткілікті емес. Сондықтан қосымша зерттеуді қажет етеді.

$u = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$ **Лагранж функциясы.**

Лагранж функциясын қолданып экстремум нүктелерін табу *Лагранж көбейткіштері әдісі* деп аталады.

Тақырып 19. Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін физикалық есептер. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі.

Тәуелсіз айнымалы x – ті, белгісіз функция $y = y(x)$ – ті және оның тәуелсіз айнымалы бойынша алынған әр түрлі ретті туындыларын байланыстыратын теңдеуді *дифференциалдық теңдеу* деп атайды.

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Теңдеудегі туындының ең жоғарғы реті *дифференциалдық теңдеудің реті* деп аталады. Дифференциалдық теңдеуге қойғанда қанағаттандыратын $y = y(x)$ функциясын деңдеудің *шешімі* дейді. Шешім бір мәнді емес, шексіз көп мәнді болады. сондықтан, теңдеудің *жалпы шешімі* деп теңдеудің реті қанша болса, сонша тәуелсіз тұрақты шамалары бар шешімді айтады. Жалпы шешімнен тұрақты шамаларға нақты мән беру арқылы алынған шешім *дербес шешім* болады. Егер $y = y(x)$ функциясы шешімнен алынғанмен теңдеуді қанағаттандырса, онда ол *ерекше шешім* болады. Дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды оны *интегралдау* деп атайды. Дифференциалдық теңдеу шешімінің графигі дифференциалдық теңдеудің *интегралдық қисығы* деп атайды. Егер теңдеудің шешімі y арқылы айқындалмаған болса, онда ондай шешімін *жалпы интеграл* деп атйды. Жалпы шешім барлық дербес шешімдерді біріктіретін шешім *Коши есебі* деп дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табуды айтады.

Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция тек бір айнымалыға ғана тәуелді болса, онда дифференциалдық теңдеу *қарапайым* дифференциалдық теңдеу деп, ал белгісіз функция бірнеше айнымалыға тәуелді болса, онда дифференциалдық теңдеу *дербес дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Мысалы, $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ – жалпы шешімі – $y = (x-c)^3$.

Бірақ $y = 0$– ерекше шешім, өйткені, жалпы шешімнен алынбаған теңдеуді қанағаттандырады.

<u>Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің түрлері:</u>

1. Айнымалылары ажыратылған және айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

а) $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ теңдеуі айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу (х – тері бір бөлек, у – тері бір бөлек) деп аталады.

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \text{– оның жалпы интегралы.}$$

б) $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ теңдеуі айнымалылары ажыраты-латын дифференциалдық теңдеу. Бұл теңдеудің екі жағын $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$ бөлсек, онда

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

теңдеуі шығады, оның жалпы интегралы

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$

болады.

в) $y' = \mathrm{f}(ax + by + c)$, мұндағы a, b, c – сандар, теңдеуін $ax + by + c = z$ алмастыруы арқылы айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Мысалы: $y' = -\dfrac{y}{x}$

Шешуі: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

$y = \dfrac{C}{x}$ – теңдеудің жалпы шешімі.

2. Біртекті теңдеу

Егер $\mathrm{f}(tx, ty) = t^n \mathrm{f}(x, y)$ теңдігі орындалса, онда $f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ функциясы n – *өлшемді біртекті функция* деп аталады.

Кез келген $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ түріндегі теңдеу *біртекті* деп аталады. Біртекті теңдеулер айнымалысы ажыратылатын теңдеуге келтіріле отырып шешіледі.

Бұл теңдеуді шешу үшін $y = ux$, $y' = u'x + ux'$ алмастырулары қолданылады:

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Интегралды таба отырып, u функциясының орнына x және y арқылы өрнектелген мәнін алмастырып, біртекті теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

а) Егер $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, онда $a_1 x + b_1 y = t$ белгілеу керек.

Мысалы: $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$ теңдеуінің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 = 1 \\ y = y_0 = -1 \end{cases}$

$x = u+1,\ y = \vartheta - 1,\ dx = du,\ dy = d\vartheta$

Орнына қоямыз:

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{u+2\vartheta}{2u+\vartheta} \text{ – біртекті теңдеу.}$$

$\vartheta = tu$ алмастыруы арқылы біртекті теңдеуді шешеміз. Содан кейін $u = x-1$, $\vartheta = y+1$ мәндерін қойып,

$$(y - x + 2)^3 = c(x+y)$$

Бұл берілген теңдеудің жалпы интегралын табамыз.

Тақырып 20. Біртекті және біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Жалпы шешімінің құрылымы. Лагранждың кез келген тұрақтыларды вариациялау әдісі.

3. Сызықтық теңдеу

а) Егер белгісіз функция y және оның туындысы y′ арқылы бірінші ретті дифференциалдық теңдеу сызықты болса, онда оны *сызықтық теңдеу* дейді және ол мына түрде жазылады:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Егер $q(x) = 0$, онда (1) теңдеу *біртекті* деп аталады.

Егер $q(x) \neq 0$, онда (1) теңдеу *біртекті емес* деп аталады.

Сызықтық теңдеуді интегралдау әдістері:

1) Тұрақтыны вариациялау әдісі (Ланграж әдісі)

Ең алдымен (1) теңдеуге сәйкес біртекті сызықтық теңдеуді алып, оның жалпы шешімін табамыз:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

$\dfrac{dy}{y} = -p(x) \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C \quad y = ce^{-\int p(x)dx}$ – бұл біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімі.

Берілген (1) теңдеудің жалпы шешімін табу үшін (2) теңдеудің жалпы шешіміндегі тұрақты шаманы x айнымалысына тәуелді $c = c(x)$ функциясы деп алып, вариациялаймыз, яғни (1) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп таңдап аламыз. Беріліген теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (3)$$

x бойынша дифференциалдаймыз:

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (4)$$

(1) теңдеуге қоямыз. Сонда $c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

$$c(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx},\ c(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx} + C \quad (5)$$

(5) – ті (3) қойсақ, $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx} + C\right)$ – бұл (1) теңдеудің жалпы шешімі.

2) Бернулли әдісі.

(1) теңдеудің жалпы шешімін екі функцияның көбейтіндісі ретінде іздестіруге болады, яғни $y = u \cdot \vartheta$, мұндағы $u = u(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$ алмастырумен де шешуге болады.

б) Бернулли теңдеуі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1$$

Бұл Бернулли теңдеуі деп аталатын теңдеуді сызықтық теңдеуге келтіруге болады. Оны да $y = u \cdot \vartheta$ алмастыруымен шешуге болады.

4. Толық дифференциалды теңдеу.

а) Егер $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ қанағаттандырса, онда $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$ – белгісіз $r(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады. олай болса, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1) теңдеуді *толық дифференциалды теңдеу* деп аталады.

Ол үшін

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Бұл толық дифференциал болудың шарты. Толық дифференциалды теңдеуді $du(x,y) = 0$ түрінде жазуға болады. оның жалпы интегралы $u(x,y) = C$.

$$\int_{x_0}^{x} P(x, x_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y, y_0)dy = C$$

Бұл толық дифференциалды теңдеудің жалпы интегралы.

б) Кейде (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болмағанымен, $\mu(x,y)$ көбейткіші арқылы толық дифференциалды теңдеуге келтіруге болады. Мұндай функция $\mu(x,y)$ – интегралдау көбейткіші деп аталады.

$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$ теңдеуді толық дифференциалдау теңдеу болады, яғни $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{y(\mu Q)}{\partial x}$ орындалады.

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \mu = e^{\int \varphi(x)dx}, \ \varphi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu = e^{\int \varphi(y)dy}, \ \varphi(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}.$$

1. $y' = f(x, y)$ немесе $F(x, y, y') = 0$ бірінші ретті теңдеулер негізінен қарастырылған төрт түрдің біреуіне келтіріледі.

2. Кейде ерекше түрлері мен шешімдері болады:

Мысалы,

а) *Ланграж теңдеуі* $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

Жалпы шешімі $\begin{cases} x = x(p, c) \\ y = x(p, c)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$, $p = y'$ – параметр.

б) *Клеро теңдеуі* $y = x'y + \psi(y')$ (Ланграж теңдеуінің дербес түрі)

Оның жалпы шешімі $y = Cx + \psi(C)$, $C = y'$ – параметр.

Мысалы,

$y = xy' + \dfrac{a}{2y}$, $(a = const)$ – Клеро теңдеуі

$y = Cx + \dfrac{a}{2C}$ – жалпы шешімі.

Тақырып 21. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.

Анықтама. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу *n* ретті *дифференциалды теңдеу* деп аталады.

Кейде бұл теңдеу былайша да беріледі: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Бірінші ретті дифференциалды теңдеулер сияқты жоғары ретті дифференциалды теңдеулердің де шексіз көп шешімі болады.

Анықтама. Егер $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

болса, онда $y = \varphi(x)$ теңдеуі $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ бастапқы шарттарын қанағаттандырады деп айтылады.

Анықтама. $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ теңдеуінің шешімін табу *Коши есебі* деп аталады.

Дифференциалды теңдеудің ретін төмендету - жоғары ретті дифференциалды теңдеуді шешудің негізгі әдісі. Бұл әдіспен теңдеудің шешімін оңай табуға болады.

Анықтама. *y* функциясы және оның $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ туындыларына қатысты

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

түріндегі теңдеу *n* – ші ретті сызықтық дифференциалды теңдеу деп аталады. мұндағы $p_0, p_1, \ldots, p_n$ –*x*-қа тәуелді функция немесе тұрақты шамалар. ($p_0 \neq 0$)

Теңдеудің сол жағын *L(y)* деп белгілейік.

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=L(y);$$

Анықтама. Егер $f(x)=0$ болса,онда $L(y)=0$ теңдеуі сызықтық біртекті дифференциалды теңдеу деп, ал егер $f(x)\neq 0$ болса, онда $L(y)=f(x)$ теңдеуі сызықтық біртекті емес деп, егер барлық p_0, p_1, p_2, ... p_n коэффициенттері– тұрақты сандар болса,онда $L(y)=f(x)$ теңдеуі *жоғарғы ретті тұрақты кооэффициентті сызықтық дифференциалды теңдеу* деп аталады.

Сызықтық біртекті дифференциалды теңдеудің шешімі:

1)Егер y_1 функциясы теңдеудің шешімі болса,онда Cy_1 функциясы да шешімі болады, мұндағы C – тұрақты сан.

2) Егер y_1 и y_2 функциялары теңдеудің шешімі болса, онда y_1+y_2 функциясы да шешімі болады.

Теорема. Егер дифференциалды теңдеу $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ түрінде беріліп, бір дара шешімі $y=y_1$ белгілі болса,онда жалпы шешімі төмендегі формуламен табылады:

$$y=C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx+C_1y_1.$$

1. $y^{(n)}=f(x)$

Шешуі. $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$

$$y^{(n-2)}=\int\left(f(x)dx+C_1\right)dx+C_2$$

....

$$y=\int\ldots\int f(x)dx\ldots dx+C_1\frac{x^{n-1}}{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$$

Мысалы: $y'''=12x$

Шешуі: $y''=\int 12x\,dx=12\cdot\frac{x^2}{2}+C_1=6x^2+C_1$

$$y'=\int\left(6x^2+C_1\right)dx=2x^3+C_1x+C_2$$

$$y=\int\left(2x^3+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{2}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$ – теңдеудіңжалпы шешімі.

2. $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots y^{(n)}\right)=0$ теңдеуін шешу үшін $y^{(k)}=z$, $y^{(k+1)}=z'$, ... $y^{(n)}=z^{(n-k)}$, $z=z(x)$ алмастыруын жасаймыз. Сонда теңдеу мына түрге келтіреді:

$F\left(x,z,z',\ldots z^{(n-k)}\right)=0$– бұл $(n-k)$– ретті дифференциалды теңдеу. Демек, берілген теңдеудің реті k бірлікке төмендеді.

Мысалы: $xy'''-y''=0$

Шешуі: $y''=z$, $y'''=z'$

$$xz'-z=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|z|=\ln|x|+\ln|C_1|\Rightarrow z=C_1x.$$

$$y''=C_1x\Rightarrow y'=C_2\frac{x^2}{2}+C_2\Rightarrow y=C_1\frac{x^3}{3!}+C_2x+C_3$$

3. $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 -$ тәуелсіз айнымалы айқын түрде кірмеген теңдеу. Бұл теңдеуді шешу үшін $y' = p$, $p = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

$$yy'' - y'^2 - 4yy' = 0$$

Шешуі: $y' = p$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

$$py\frac{dp}{dy} - p - 4py = 0 \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0$$

1. $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$
2. $y\frac{dp}{dy} = p + 4y -$ біртекті теңдеу

$p = uy$, $p' = u'y + u$

$$y^2u' + uy = uy + 4y \Rightarrow du = \frac{4dy}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$p = 4y\ln|C_1y| \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 4y\ln|C_1y|$$

4. $F\left(x, y', y'' \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

$$y' = p,\ p = p(x),\ y'' = p',\ldots,\ y^{(n)} = p^{(n-1)}$$
$$F\left(x, p', p'' \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0$$

Мысалы: $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ теңдеуін шешіңдер.

Шешуі: $y' = p$, $y'' = p'$, $p = p(x)$

Тақырып 22. Коэффиценттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер. Оң жағы арнайы түрде болатын теңдеулер

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = \mathrm{f}(x)$$

бұл сызықтық біртекті емес n – ретті дифференциалдық теңдеу, мұндағы $a_i(x)$, $i = 1,2,\ldots n -$ үзіліссіз функциялар.

1. $f(\mathrm{x}) = 0$, $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$

бұл біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу.

Біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

мұндағы $y_1, y_2, \ldots, y_n -$ (2) теңдеудің сызықтық тәуелсіз дербес шешімдері.

2. $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \mathrm{f}(x)$ – біртекті емес $(\mathrm{f}(x) \neq 0)$ теңдеудің тұрақтыны вариациялау әдсімен шешейік. Ол үшін бірінші ретті сызықтық теңдеудегі сияқты $y = C_1y_1 + C_2y_2$ сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешіміндегі $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ деп атаймыз.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \qquad (1)$$

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2$$

y' – бұрынғы түрін сақтап қалу үшін

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

деп аламыз. Сонда

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$

болып қалады.

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'$$

тағы да

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \mathrm{f}(x)$$

теңдеуді қанағаттандыруы керек болғандықтан $\mathrm{f}(x)$– ке теңейміз. Сонда

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \mathrm{f}(x) \end{cases} \Rightarrow \ C_1(x),\ C_2(x) \text{ табамыз.}$$

Содан кейін (1) теңдікке апарып $C_1(x)$, $C_2(x)$ мәндерін қойып, берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

мұндағы a_i, $i = \overline{1,n}$ – тұрақты шамалар.

(1) – тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеу.

(1) теңдеудің шешімін $y = e^{kx}$ түрінде іздейміз.

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}, \ldots,\ y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

(1) теңдеудегі $y, y'', \ldots, y^{(n)}$ орындарына мәндерін қоямыз. Сонда

$$e^{kx}\left(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n\right) = 0 .$$

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \quad (2),\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{kx}} \neq 0\right)$$

(2) теңдеу (1) теңдеудің мінездемелік теңдеуі деп аталады.

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

мінездемелік теңдеудің n түбірі бар .Әрбір k_i түбірге сәйкес дифференциалдық теңдеудің шешімі табылады.

Біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = \mathrm{f}(x)$$

түріндегі теңдеу n-ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Теорема. $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = \mathrm{f}(x)$ -сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен біртекті емес теңдеудің дербес шешімдерінің қосындысынан тұрады.

Сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін *тұрақтыны вариациялау әдісі қолданылады.*

Алдымен берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімін табу керек. Ол мына түрде жазылады:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i;$$

Содан соң, C_i коэффициенттерін *x-тің* функциялары деп есептеп, біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табу керек:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i;$$

Тұрақты коэффициентті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп, $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, мұндағы $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ түріндегі теңдеуді айтады. Теңдеудің жалпы шешімі $y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)$ түрінде жазылады,мұндағы $y_0(x)$-сәйкес біртекті теңдеудің шешімі,ал $\tilde{y}(x)$-теңдеудің дербес шешімі.

Тақырып 23. Сандық қатарлар. Жинақтылығы және қатардың қосындысы. Жинақтылықтың қажетті шарты. Жинақталатын қатарларға қолданылатын амалдар. Мүшелері оң таңбалы қатарлар. Жинақтылықтың жеткілікті белгілері

Анықтама. Шексіз сандық тізбектің $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ қосындысын сан қатары деп атаймыз**.**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_1, u_2, \ldots$ сандары қатардың мүшелері, ал u_n – қатардың жалпы мүшесі.

Анықтама. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ қосындылары қатардың дербес қосындылары деп аталады.

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ дербес қосындылар тізбегін қарауға болады.

Анықтама. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатарының дербес қосындыларының тізбегі жинақталса, онда қатар *жинақталған* деп аталады.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$- қатар қосындысы.

Ал егер қатардың дербес қосындыларының тізбегі жинақталмаса, немесе шегі болмаса, немесе шексіздікке айналса, онда қатар *жинақталмаған* деп аталады.

Қасиеттері:

1) Егер қатардың бірнеше санаулы мүшесін қатардан шығарып тастаса, онда қатардың жиақтылығы немесе жинақсыздығы бұзылмайды.

2) Екі қатар қарастырайық $\sum u_n$ және $\sum Cu_n$, мұндағы С – тұрақты.

Теорема. Егер $\sum u_n$ жинақталса және оның қосындысы S-ке тең болса,онда $\sum Cu_n$ қатары да жинақталады, әрі қосындысы CS ($C \neq 0$) болады.

3) Екі қатар қарастырайық $\sum u_n$ және $\sum v_n$. Бұл қатарлардың қосындысы не айырмасы $\sum (u_n \pm v_n)$ қатарына тең, мұндағы қатардың әрбір элементі сәйкесэлементердің қосындысынан не айырмасынан алынады.

Теорема. Егер $\sum u_n$ және $\sum v_n$ қатарлары жинақталса және қосындылары сәйкес S және σ болса, онда $\sum (u_n \pm v_n)$ қатары да жинақталады және қосындысы S + σ болады.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Жинақты екі қатардың айырмасы да жинақты болады.
Ал жинақты және жинақсыз екі қатардың қосындысы жинақсыз болады.
Екі жинақсыз қатардың қосындысы туралы тұжырым жасау қиын.

Теорема.(Жинақтылықтың қажетті шарты.) Егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесінің шегі $n \to \infty$ жағдайда нольге тең болады.

Салдар. Егер қатардың жалпы мүшесі $n \to \infty$ жағдайда нольге ұмтылмаса, онда қатар жинақсыз.

Оң мүшелі қатарлардың жинақтылығының жеткілікті белгілері:

1. *Салыстыру белгілері.*

Айталық екі қатар берілсін $\sum u_n$ және $\sum v_n$ мұндағы $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема 1. Егер кез келген n үшін $u_n \leq v_n$ болып, және $\sum v_n$ қатары жинақты болса, онда $\sum u_n$ қатары да жинақталады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

Шешуі. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, ал $\sum \frac{1}{2^n}$ жинақты, өйткені ол шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы, олай болса берілген $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ қатары жинақталады.

Теорема 2. Егер кез келген n үшін $u_n \geq v_n$, болып, және $\sum v_n$ қатары жинақты болмаса, онда $\sum u_n$ қатары да жинақталмайды.

Теорема 3. Егер $u_n > 0, \quad v_n > 0$ және $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$ шегі бар болса, h – нольден ерекше сан, онда $\sum u_n$, $\sum v_n$ қатарлары бірдей жинақталады немесе жинақталмайды.

Даламбер белгісі. Егер $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ шегі бар болса, онда ρ < 1 қатар жинақталады, ал ρ > 1 – қатар жинақталмайды. Егер ρ = 1, онда бұл теорема сұраққа жауап бере алмайды.

Коши белгісі (радикалды белгі). Егер оң мүшелі $\sum u_n$ қатары үшін q<1 саны табылып, барлық n үшін мына теңсіздік орындалса

$$\sqrt[n]{u_n} \le q,$$

онда $\sum u_n$ жинақаталады, ал

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$$

теңсіздігі орындалса, онда $\sum u_n$ қатар жинақталмайды.

Салдар. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$ шегі бар болып, ρ<1 болса, қатар жинақты,ал ρ>1 қатар жинақсыз.

Кошидың интегралдық белгісі. Егер φ(x) – оң үзіліссіз функция болып, және [1;∞) арсында кемімелі болса, онда φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … = $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ қатары мен $\int\limits_{1}^{\infty}\varphi(x)dx$ меншіксіз интегралы бірдей жинақталады немесе бірдей жинақталмайды.

Мысал. $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$ қатары α>1 болғанда жинақталады, ал α≤1 жинақталмайды, өйткені оған сәйкес интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ α>1 жинақталады, ал α≤1 болғанда жинақталмайды.

Тақырып 24. Айнымалы таңбалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақтылық. Ауыспалы таңбалы қатарлар. Лейбниц белгісі

Таңбалары кезектесіп ауысатын қатарды қарастырайық:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$$

мұндағы $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

Лейбниц белгісі.

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$ кезек таңбалы қатарының мүшелері кемімелі болса, $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ ал жалпы мүшесі $u_n \to 0$,онда қатар жинақталады.

Мысал.

1-1/2 +1/3 -1/4 +...+(-1)$^{n+1}$(1/n)+… қатары жинақталады, өйткені

1) 1 > 1/2 > 1/3> …

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

$\sum u_n$ - таңбалары айнымалы қатар, яғни қатар мүшелерінің ішінде оң таңбалы да, теріс таңбалы да сандар бар. Кезек таңбалы қатар мұндай қатардың жеке жағдайы болады.

Даламбер белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, ρ<1 болса $\sum u_n$ қатары абсолютті жинақталады, ал ρ>1 қатар жинақталмайды.

Коши белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, онда ρ<1 болса $\sum u_n$ қатары абсолютті жинақталады, ал ρ>1 болса, қатар жинақталмайды

Таңбалары айнымалы қатар карастырайық.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

және қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын қатар:

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. (2) қатардың жинақтылығынан (1) қатардың жинақтылығы шығады.

Анықтама. Егер $\sum |u_n|$ қатары жинақталса, онда $\sum u_n$ қатары *абсолютті жинақталады* деп аталады.

Анықтама. Егер $\sum |u_n|$ қатары жинақталып, ал $\sum u_n$ жинақталмаса, онда ол *жинақталмайд*ы деп аталады.

Абсолютті және шартты жинақталатын қатарлардың қасиеттері айтылуы тиіс.

Тақырып 25. Функционалдық қатарлар туралы түсінік. Жинақталу облысы. Бірқалыпты жинақтылық ұғымы. Вейерштрасс белгісі. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Жинақтылық радиусы

Анықтама. Егер қатар мүшелері х- ке тәуелді функциялар болса, ондай қатар *функционалдық қатар* деп аталады.

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x) +\ldots u_n(x) +\ldots$$

х- ке әртүрлі мән бергенде әртүрлі сан қатарлары шығады.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатарының алғашқы n мүшелерінің қосындысын *n-ші дербес қосынды* деп атаймыз: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$

Анықтама. Функционалдық $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатарының дербес қосындыларының тізбегі ($x=x_0$) нүктесінде жинақталса, онда қатар да осы нүктеде жинақталады деп аталады.

Функционалды қатар жинақталатын х- тің барлық мәндерінің жиынын осы қатардың *жинақталу облысы* деп атаймыз.

Вейерштрасс белгісі (Қатардың бірқалыпты жинақтылығы туралы).

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционалдық қатары үшін жинақталатын оң мүшелі

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ...$$

қатары табылып, х- тің барлық мәндері үщін мына теңсіздіктер

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, ... , |u_n(x)| \le \alpha_n, ...$$

орындалса, онда функционалдық қатары *бірқалыпты жинақталады* деп аталады.

Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ қатары үшін жинақталатын $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарын алуға болады, мұндағы $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $n = 1,2,3,...$ Ендеше берілген қатар бірқалыпты жинақталады.

Осы лекцияда қатар қосындысының үзіліссіздігі туралы, қатарды мүшелеп интегралдау және дифференциалдау туралы айтылады.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}.$$

Дәрежелік қатар деп мына түрдегі

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n .$$

қатарды айтамыз. Дәрежелік қатарлардың жинақтылығын зерттеуге Даламбер, Коши белгілерін қолданамыз.

Абель теоремасы. (Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норв. Математик)

Егер $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ дәрежелік қатары $x = x_1$ мәнінде жинақты болса, онда ол барлық $|x| > |x_1|$ мәні үшін жинақты, әрі абсолютті жинақты.

Салдар. Ал егер $x = x_1$ мәнінде жинақты болмаса, онда ол барлық $|x| > |x_1|$ мәндері үшін жинақты емес. Сонымен әрбір дәрежелік қатар үшін $|x| < R$ қатар жиақты, ал $|x| > R$ қатар жинақты емес.

(-R, R) интервалы *жинақтылық интервалы* деп аталады. Жинақтылық радиусы былай табылады.

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ - бұл Даламбер белгісі бойынша. Ал Коши белгісі бойынша

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Тақырып 26. Функцияларды дәрежелік қатарға жіктеу. Тейлор қатары. Дәрежелік қатарларды жуықтап есептеулерде қолдану

Тейлор және Маклорен қатарлары туралы айтылуы тиіс. Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелулері көрсетілуі керек. Мысалы, e^x, sinx, cosx, … мысалы,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Анықтама. *Тригонометриялық қатар* деп мына түрдегі қатарды айтамыз:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

қысқаша, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$

Нақты a_i, b_i сандары тригонометриялық қатардың коэффициенттері.

Егер қатар жинақталса, онда оның қосындысы периодты, периоды 2π ге тең функция болады. Айталық, тригонометриялық қатар [-π; π] арасында бірқалыпты жинақталса,онда оның қосындысы *f(x)* болады. Коэффициентерін табайық. Ол үшін

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad n = 1,2,\ldots$$

екендігін дәлелдеп аламыз.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = 0\,.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

cos*nx* көбейтеміз, сосын -π ден π ге дейін интегралдаймыз.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)dx = \pi a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,\ldots$$

Дәл осы сияқты $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$$

f(x) функциясының Фурье коэффициенттері деп аталады.

Анықтама. *f(x)* функциясының *Фурье қатары* деп коэффициенттері Фурье коэффициенттері болатын тригонометриялық қатарды айтамыз.Егер Фурье қатары *f(x)* функциясына жинақталса, онда ол функция *Фурье қатарына жіктеледі* деп аталады.

Тақ және жұп функциялар үшін Фурье қатарының коэффициенттерін табамыз. Кез келген периодты функция үшін Фурье қатарын жазамыз.

Теорема (Риман теоремасы). Егер *f(x)* функциясы (а,в) интервалында абсолютті интегралданатын болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\nu x\, dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\nu x\, dx = 0$$

Салдар. Абсолютті интегралданатын функцияның Фурье коэффициенттері $n \to \infty$ жағдайында нөлге ұмтылады.

Тақырып 27. Ықтималдықтар теориясының аксиоматикасы. Нәтижесі кездейсоқ болатын тәжірибелер тобы. Жиілік. Кездейсоқ құбылыстардың математикалық өрнектелуі. Кездейсоқ оқиғалар, оларға амалдар қолдану. Ықтималдықтың классикалық және статистикалық анықтамалары. Шартты ықтималдықтың анықтамасы. Оқиғалардың тәуелсіздігі. Толық ықтималдық теоремасы. Бейес формуласы

Кездейсоқ оқиға дегеніміз белгілі шартты жағдайда пайда болуы да мүмкін оқиға.

Ақиқат оқиға дегеніміз қалайда болтын оқиға.

Мүмкін емес оқиға дегеніміз орындалмайтын оқиға.

Қарама –қарсы оқиғалар – бірін-бірі жоққа шығаратын оқиғалар.

Үйлесімсіз оқиғалар –бір мезгілде пайда болмайтын оқиғалар. Үйлесімді оқиғалар -бір мезгілде пайда болатын оқиғалар. Тәуелді оқиғалар –біреуінің пайда болуы екіншісіне байланысты оқиғалар.

Тәуелсіз оқиғалар – бір –біріне байланыссыз пайда болатын оқиғалар.

Егер тәжірибені қайталағанда {Ai} (i=1,2,...,n) тобындағы оқиғалардың біреуі пайда болса және бұлардан басқа оқиғалар пайда болуы мүмкін емес болса, онда {Ai}(i=1,2,...,n) **толық топты** құрайды.

А ,В –екі оқиғаның қосындысы дегеніміз А немесе В оқиғасының пайда болуы.

А ,В –екі оқиғаның көбейтіндісі дегеніміз А және В оқиғаларының бірге пайда болуы.

Адам өмірінде кездесетін кездейсоқтық , белгісіздік оны зерттеуді , заңдылықтарын анықтап алдын алуды керек етеді. Осы мақсатта жүргізілген комплекс амалдар мен сынақтарды , зерттеу эксперименттерін **тәжірибе** деп атайды.

Ықтималдықтар теориясы кездейсоқ құбылыстардың ортақ заңдылығын зерттейтін ғылым.

Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі оқиға ұғымы. Әдетте, оқиға тәжірибенің немесе бақылаудың нәтижесінде пайда болады. Тәжірибенің кез келген мүмкін болатын нәтижесін **элементар оқиға** деп атайды.

А оқиғасының **ықтималдығы** деп, оның пайда болуына ықпалын тигізетін оқиғалар санының (m) жалпы элементар оқиғалар санына (n) қатынасын айтады және былай белгіленеді. (П. Лаплас – француз математигі)

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

Егер n-барлық мүмкін болатын элементар оқиғалар саны, ал m – оқиғаның орындалуына ықпал тигізетін элементар оқиғалар саны болса, онда (1) анықтама **классикалық анықтама** деп аталады.

Оқиғаның жиілігі деп жасалған тәжірибенің нәтижесінде орындалған оқиғаның санын жасалған тәжірибенің жалпы санына қатынасын айтады да, мына формуламен есептейді:

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

Айталық, шектеулі D облысы бірнеше бөлшектерге D_1, D_2, ….., Dn бөлінді делік. Нүктені лақтырып қалғанда D_k -белгілі бөлшегіне түсуін А-оқиғасы десек,

$$P(A)=\frac{\mathrm{Dk}}{D}$$

Теорема. Тәуелді екі А және В оқиғаларының бірге пайда болу ықтималдығы

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)$$

Мұндағы $p_A(B)$- А оқиғасы орындалды деп есептеп, одан кейін есептелетін В оқиғасының ықтималдығын ***шартты ықтималдық*** деп атайды.

Егер А оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын B_1, $B_2,...,B_n$ оқиғаларының (гипотезаларының) біреуімен бірге болатын болса, онда А оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A)=p(B_1)p_{B1}(A)+p(B_2)p_{B2}(A)+\ldots+p(B_n)p_{Bn}(A) \qquad (2)$$

Бұл формула **толық ықтималдық формуласы** деп аталады.

А оқиғасы пайда болады десек, оның пайда болуына ықпалын тигізетін толық топ құрайтын гипотезалардың ықтималдығы **Бейес формуласы** арқылы табылады:

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)p_{B_i}(A)}{p(A)} \qquad (3)$$

(3) формула $p_A(B_i)p(A)=p(B_i)p_{B_i}(A)$ теңдігінен шығады.

Тақырып 28. Тәуелсіз сынақтар тізбегі. Бернулли схемасы. Муавр-Лапластың шектік теоремалары және Пуассон теоремасы

Нәтижелерінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын тәжірибелерді ***тәуелсіз тәжірибелер*** деп атайды. Мұндай тәжірибелерге теңге лақтыру, бұйымның сапалылығын тексеру, бөлшектің жарамдылығын тексеру т.б. тәжірибелер жатады.

Тәуелсіз n тәжірибеде ықтималдығы тұрақты А оқиғасының тура m рет пайда болуының ықтималдығы **Бернулли формуласымен** есептеледі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

мұндағы $P(A) = p$, $q = 1 - p = P(\overline{A})$

Бернулли формуласы n, m сандары үлкен болмағанда қоолдануға ыңғайлы. Ал n, m үлкен сандар болса, эксперименттік функциялары арқылы өрнектелген Лаплас формулаларын қолдануға болады.

Муавр-Лапластың локальдық теоремасы. Тәуелсіз n тәжірибеде ықтималдығы тұрақты А оқиғасының тура m рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы. Тәуелсіз n тәжірибеде ықтималдығы тұрақты А оқиғасының тура m_1-ден кем емес m_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \quad \Phi(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x_2} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

Мұндағы φ(x), Φ(x) функцияларының кестелік мәндері берілген.

Ескерту

1. φ(x)-жұп функция, онда φ(-x)= φ(x)

2. Φ(x)-тақ функция, онда Φ(-x)=- Φ(x)

Егер n рет тәжірибеде А оқиғасы өте аз ықтималдықпен p(A)=p пайда болса, ал n өте үлкен сан болса, онда Пуассон формуласы қолданады:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Тақырып 29. Кездейсоқ шамалар анықтамасы, қасиеттері және түрлері. Үзіліссіз және дискретті үлестірімдер. Үлестірім мысалдары. Кездейсоқ шамалардың функциясы. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары және олардың қасиеттері

Жасалған сынақтың нәтижесінде қандай да бір мүмкін мәнді қабылдайтын шаманы ***кездейсоқ шама*** деп атайды.

Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері шекті немесе саналымды шексіз болса, онда ондай кездейсоқ шамаларды ***дискретті*** деп атайды.

Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін [а,в] интервалында қабылдаса және бұл мәндерді бүтін сандармен нөмірлеуге болмаса, онда ол ***үзіліссіз*** кездейсоқ шама деп аталады.

Кездейсоқ шамаларды X,Y,Z,… бас әріптерімен, ал олардың қабылдайтын мүмкін мәндерін x,y,z кіші әріптермен белгілейміз.

Бұл оқиғалардың ықтималдықтарын сәйкес P_i ($i=1,\overline{n}$) арқылы белгілейміз, яғни

$$p_1=P(X=x_1),\ p_2=P(X=x_2),\ \dots,\ p_n=P(X=x_n).$$

$X=x_1$, $X=x_2$,…, $X=x_n$ оқиғалары толық топ құрайды, сондықтан $\sum_{i=1}^{n} Pi=1$, яғни кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері ықтималдықтарының қосындысы бірге тең.

Кездейсоқ шама мәндерімен оларға сәйкес ықтималдықдарды байланыстыратын ереже дискретті кездейсоқ шаманың ***үлестірім заңы*** делінеді. Бұл заң кесте, график немесе аналитикалық түрде берілуі мүмкін. Әрқайсысын жеке – жеке қарастырайық.

Кестелік түрде былай беріледі:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Кестелік түрде берілген дискретті кездейсоқ шаманың мәндерін X және P осьтеріне салып, содан шыққан нүктелерді түзумен қоссақ, онда оның графиктік кескіні шығады.

Ал, егер де $x_1,x_2,\dots x_n$ мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын белгілі бір формуламен ($P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$) есептейтін болсақ, онда дискреттік кездейсоқ шама ***аналитикалық түрде берілген*** деп аталады.

Енді үлестірім заңының аналитикалық түрін қарастырайық:

1. Биномдық үлестірім.

Егер мүмкін мәндері 0,1,2,...,k болып, ал осы мәндерді қабылдау X=k ықтималдықтары Бернулли формуласымен анықталса

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ ,$$

онда кездейсоқ шама ***биномдық үлестірім заңымен берілген*** деп аталады.

Сонымен биномдық үлестірім заңдылығымен берілген дискретті кездейсоқ шаманы - тұрақты ықтималдықты А оқиғасының n тәуелсіз сынақтарда пайда болуының саны ретінде қарастыруға болады.

2. Пуассондық үлестірім.

Егер тәуелсіз сынақтарда n үлкен саны болса және р-ның шамасы аз болса, онда кздейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын Пуассон формуласымен

$$P(X=x)=P_n(k)\approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda = np$$

есептеу керек.

Бұл жағдайда кездейсоқ шама ***Пуассондық үлестірім заңымен берілген*** дейді.

Ықтималдықтар теориясында бұл сандық сипаттамалармен оларға қолданылатын операциялардың рөлі өте зор. Осы сандық сипаттамаларды білу нәтижесінде көптеген ықтималдықтар есептерін шешу жеңілденеді. Әрине, мұндай сандық сипаттамалар көп-ақ. Біз солардың ішінен математикалық үміт, дисперсия, орташа квадраттық ауытқу және түрлі реттік моменттерді қарастырамыз.

1. Математикалық үміт

Дискретті кездейсоқ шаманың ***математикалық үміті*** деп оның барлық мүмкін мәндерін сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын айтады. Х кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері x_1, x_2,..., x_n болсын. Сонда математикалық үміт мына теңдікпен анықталады:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

*Математикалық үміттің қасиетте*рі:

1^0.Тұрақты шаманың математикалық үміті тұрақты шаманың өзіне тең.

2^0. Тұрақты көбейткішті математикалық үміт таңбасының сыртына шығаруға болады, яғни $M(CX) = CM(X)$.

3^0. Екі кездейсоқ шама қосындысының математикалық үміті олардың математикалық үміттерінің қосындысына тең, яғни $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

4^0. Тәуелсіз екі кездейсоқ шаманың көбейтіндісінің математикалық үміті олардың математикалық үміттерінің көбейтіндісіне тең, яғни $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Теорема. Өзара тәуелсіз n рет сынақ кезінде А оқиғасының орындалу санының математикалық үміті, сынақтың санын әрбір сынақ кезіндегі оқиғаның орындалу ықтималдығына көбейткенге тең, яғни $M(X) = np$.

2.Д***исперсия.***

Х кездейсоқ шамасы және оның математикалық М(Х) үміті берілсін. Х-М(Х) айырмасын кездейсоқ шамамен оның математикалық үмітінің арасындағы ***ауытқу*** деп атайды.

Кездейсоқ шама мен оның математикалық үміті айырымының квадратының математикалық үмітін ***дисперсия*** деп атайды.

X кездейсоқ шамасының дисперсиясын D(X) арқылы белгілесек, онда анықтама бойынша:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Теорема. Дисперсия кездейсоқ шаманың квадратының математикалық үмітінен оның математикалық үмітінің квадратын алып тастағанға тең, яғни

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Дисперсияның қасиеттері:

1^0. Тұрақты C санының дисперсиясы нөлге тең, яғни $D(C) = 0.$

2^0. Тұрақты көбейткішті дисперсия таңбасының алдына квадрат дәрежелеп шығаруға болады, яғни

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3^0. Екі тәуелсіз кездейсоқ шаманың қосындысының дисперсиясы олардың дисперсияларының қосындысына тең, яғни

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Салдар. Тұрақты шама мен кездейсоқ шаманың қосындысының дисперсиясы кездейсоқ шаманың дисперсиясына тең. $D(C + X) = D(X)$, себебі $D(C) = 0.$

4^0. Екі тәуелсіз кездейсоқ шаманың айырымының дисперсиясы олардың дисперсияларының қосындысына тең, яғни

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

5^0. $D(X) \geq 0$

Теорема. Әрбір сынақ кезінде оқиғаның орындалу ықтималдығы p-ға тең болатын A оқиғасының n рет тәуелсіз сынақ жасағандағы орындалу санының дисперсиясы, жасалынатын сынақтың санын оқиғаның бір сынақтағы орындалу және орындалмау ықтималдықтарына көбейткенге тең, яғни

$$D(X) = npq.$$

Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің, оның орташа мәнінің маңайында шашырауын, яғни топтасуын бағалайтын сипаттаманың бірі орташа квадраттық ауытқу болып табылады.

X кездейсоқ шамасының ***орташа квадраттық ауытқуы*** деп дисперсиядан алынған квадрат түбірді айтады, яғни

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X).}$$

X кездейсоқ шамасының F(x) үлестірім функциясы болса, оның φ(t) ***характеристикалық функциясы*** мына теңдікпен анықталады:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

мұндағы t- нақты айнымалы, *i*-жорамал сан.

***Характеристикалық функциясы қасиеттері*:**

1^0. $\varphi(0) = 1$.

2^0. $|\varphi(t)| \le 1$.

3^0. Характеристикалық функциясы барлық түзу бойында бірқалыпты үзіліссіз.

4^0. Егер X және Y кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда Z=X+Y қосындысының характеристикалық функциясы қосылғыштардың характеристикалық функцияларына көбейтіледі.

Тақырып 30. Математикалық статистика. Негізгі ұғымдары мен мақсаттары. Таңдама. Таңдама бойынша үлестірімнің белгісіз параметрлерін нүктелік бағалау. Бағалардың орындаушылық және ауытқымаушылық ұғымдары

«Статистика» термині латынның «статус» деген сөзінен алынған, қазақшаға аударғанда «күй», «хал-жай» деген мағынаны береді. Өмір құбылыстарын сын, өлшем және салмақ арқылы немесе сандық қатынастар арқылы сипаттау мәселесі XVII ғасырдың екінші жартысында пайда болды, яғни мәліметтерді жинақтау және жариялау мәселелері сауда капиталының даму дәуірінде кездескен. XIX ғасырда қоғамдық құбылыстарды зерттеуге қолданып келген статистикалық әдістер жаратылыстану ғылымдарына да енді.

X кездейсоқ шамасының мүмкін болатын барлық мәндерін ***бас жиын*** деп, *n* рет тәжірибе жүргізгенде пайда болған X шамасының

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

мәндерін ***статистикалық қатар*** деп атайды. Ал бас жиыннан әр түрлі қасиеттеріне байланысты теріп алынған жиынтық ***таңдама*** жиын деп аталады. Таңдама жиын бүкіл үлкен бас жиын туралы дұрыс мәлімет бере алатындай болып құрылады. Мысалы, университеттегі студенттердің үлгерімін зерттеу үшін комиссия бір факультетті таңдап алады да, оның бір, екі топтарынан бақылау жүргізеді. Осы таңдап алынған студенттердің үлгерімі бойынша бүкіл университеттің, дербес жағдайда факультеттегі оқыту сапасына жуықтап баға беріледі. Университеттегі барлық студенттер бас жиын болады.

Қатар элементтерін өсу тәртібі бойынша орналастырылғаннан кейін шыққан

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$$

қатарын ***вариациялық қатар*** деп, ал оның элементтерін ***варианталар*** деп атайды.

Вариациялық қатарды график түрінде кескіндеудің екі жолы бар: полигон салу және гистограмма салу.

Вариациялық қатардағы әр түрлі варианталарды кестенің бірінші жолына, ал екінші жолына n_i жиіліктері жазылады.

$n = \sum n_i$ -таңдаманың көлемі деп аталады.

Енді таңдаманың сипаттамаларына тоқталайық:

Эмпирикалық функция $F(x) = \dfrac{n_x}{n}$.

Мұндағы n_x дегеніміз x-тан кіші болатын варианталардың жиіліктерінің қосындысы. Таңдаманың көлемі үлкен болғанда, осы функция арқылы бас жиынның белгісіз интегралдық үлестірім функциясы F(x)-ты жуықтап табуға болады.

Таңдамалық ортасы деп

$$\overline{x}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

теңдігімен анықталатын X кездейсоқ шамасын айтады.

Таңдамалық дисперсиясы деп

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

теңдігімен анықталатын X кездейсоқ шамасын айтады.

Таңдамалық орташа квадраттық ауытқуы

$$\sigma = \sqrt{D_T} .$$

k-ретті бастапқы эмпирикалық момент

$$M_k = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^k , \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

k-ретті орталық эмпирикалық момент

$$m_k = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \overline{x_T})^2 , \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Таңдамалық асимметрия

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3} .$$

Таңдамалық экцесс

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 .$$

Ықтималдықтар теориясында қарастырылған параметрлерді (сипаттамаларды) теориялық деп, ал тәжірибеден алынған сәйкес параметрлерді эмпирикалық немесе статистикалық параметр дейді. Мысалы, математикалық үміт $(\theta = M(x))$ теориялық параметрге жатса, оған сәйкес тәжірибелік параметр арифметикалық орта $\left(\theta^* = \overline{x}\right)$ болады.

Егер бас жиын параметрін $\theta-$десек, онда θ^*-ны $\theta-$нің бағасы ретінде қарастырады. Ал $\theta-$ны бір ғана санмен бағалағандықтан, мұндай бағалауды ***нүктелік бағалау*** деп атайды.

Бағаның математикалық үміті бағаланатын шамаға тең болса, яғни $M(\theta^*) = \theta$, онда θ^* бағасын ***ығыспаған баға*** деп атайды.

Егер $M(\theta^*) \neq \theta$ болса, онда θ^* бағасын ***ығысқан баға*** деп атайды.

Егер $\theta-$нің бірнеше ығыспаған бағалары болса, онда олардың қайсысының дисперсиясы аз болса, соңғысын ***аса тиімді баға*** дейді.

Егер θ^* бағасы үшін $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$ шарты орындалса, онда бұл бағаны ***орнықты баға*** дейді.

Айталық $x_1, x_2, ..., x_n$ таңдамасы бойынша жасалған статистикалық θ^* баға θ параметрінің ығыспаған және орнықты бағасы болсын. Айталық, $\delta > 0$ саны берілсін. Егер $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ болса, онда θ параметрін $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ интервалы жабады деп атайды. Бірақ бірге тең ықтималдықпен мұндай интервалдың табылуы мүмкін емес. Сондықтан, θ^* бойынша θ – нің ***сенімділік бағасы*** деп $P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) = \gamma$ ықтималдығын айтады. Мұндағы δ -бағаның дәлдігі, γ - сенімділік.

Бағаланатын параметрді жабатын интервалдың екі шетімен- екі санмен анықталатын бағаны ***интервалдық баға*** деп атайды. Интервалдық бағалар бағаның дәлдігі мен сенімділігін қамтамасыз етеді.

Егер таңдама бойынша табылған $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ интервалы θ параметрін γ сенімділігімен жабатын болса, онда мұндай интервалды ***сенімділік интервал*** деп, ал $\delta > 0$ санын θ^* бағасының ***дәлдігі*** деп атайды.

Қалыпты үлестіріммен берілген сандық сипаты X шаманың белгісіз a математикалық үмітін таңдамалық орташа $\overline{x}_T$ арқылы γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай интервалдарын аламыз:

1. Егер σ - бас орташа квадраттық ауытқу белгілі болса, онда
$$\overline{x}_T - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_T + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

t-саны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ тең болатындай сан, оны Лаплас функциясының мәндер кестесін аламыз.

2. Егер σ - белгісіз болса, онда
$$\overline{x}_T - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_T + t\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Мұнда S-түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқу, $t_\gamma = t(\gamma, n)$ -шамасы кестеден анықталады.

II. БӨЛІМ

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚТАРДЫҢ ЕСЕП ШЫҒАРУ ҮЛГІЛЕРІ

Тақырып 1. Анықтауыштар. Векторлар

1-мысал. Мына анықтауыштың $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ M_{21} минорын, A_{21} алгебралық толықтауышын табыңыз.

Шешуі: $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-8=-2$; $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(-2) = 2$.

2-мысал. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{6}$ және $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$. $(2\bar{a}+3\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})$, $(2\bar{a}-3\bar{b})^2$ өрнектерінің сан мәнін табыңыз.

Шешуі: $(\bar{a}\bar{b})$ скалярлық көбейтіндісін табамыз:

$$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi = 2 \cdot 5 \cos\frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}.$$

Енді есептейміз

$$(2\bar{a}+3\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b}) = 2|\bar{a}|^2 + 3(\bar{b}\bar{a}) - 4(\bar{a}\bar{b}) - 6|\bar{b}|^2 = 2|\bar{a}|^2 - (\bar{a}\bar{b}) - 6|\bar{b}|^2 =$$

$$= 2 \cdot 4 - 5\sqrt{3} - 6 \cdot 25 = -142 - 5\sqrt{3}.$$

$$(2\bar{a}-3\bar{b})^2 = 4|\bar{a}|^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3(\bar{a}\bar{b}) + 9|\bar{b}|^2 = 4 \cdot 4 - 60\sqrt{3} + 9 \cdot 25 = 241 - 60\sqrt{3}.$$

3-мысал. $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$ және $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ векторларының арасындағы φ бұрышын табыңыз.

Шешуі:

$$\cos\varphi = \frac{1-2-8}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+4+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

бұдан $\varphi = 135^0$.

4-мысал. $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ және $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ векторлары α-ның қандай мәнінде перпендикуляр болады?

Шешуі: Олардың скалярлық көбейтіндісін табамыз:

$1 \cdot \alpha - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$, $\alpha=10$.

Тақырып 2. Матрицалар. Сызықтық теңдеулер жүйелері

1-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. AB және

ВА көбейтінділерін табыңыз.

Шешуі: АВ $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

ВА = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

2-мысал. $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Шешуі. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 9 = 11; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9.$

$x_1 = \frac{11}{13}; \quad x_2 = \frac{9}{13}.$

Тақырып 3. Түзудің және жазықтықтың теңдеулері. Екінші ретті қисықтар

1-мысал. A(2;-4); B(1;2) нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі табыңыз.

Шешуі. $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+4}{2+4}; \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{6}; \quad 6x + y - 8 = 0$

2-мысал. А(2;3) нүктесінен 2х- 3у +4 = 0 түзуіне дейінгі қашықтықты табыңыз.

Шешуі. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық былай табылады:

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, олай болса $d = \frac{|4 - 9 + 4|}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

3-мысал. 5x +10y – 3 = 0 түзуінің бұрыштық коэффициентін табыңыз.

Шешуі. 10y = 3 – 5x; y = $\frac{3}{10} - \frac{5}{10}x; \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{10}; \quad k = -\frac{1}{2}$

Тақырып 4. Математикалық талдауға кіріспе

1-мысал. Шектерді табыңыз:

а) $\lim\limits_{\tilde{o} \to 5} \frac{\tilde{o}+3}{\tilde{o}-4};$ ә) $\lim\limits_{\tilde{o} \to 2} \frac{3\tilde{o}+4}{\tilde{o}-2};$ б) $\lim\limits_{\tilde{o} \to \infty} \frac{\sin 3x}{\tilde{o}}.$

Шешуі: а) Функция $\tilde{o} = 5$ нүктесінде үзіліссіз болғандықтан берілген шек функцияның
$\tilde{o} = 5$ нүктесіндегі мәніне тең:

$$\lim_{\tilde{o} \to 5} \frac{\tilde{o}+3}{\tilde{o}-4} = \frac{5+3}{5-4} = 8;$$

ә) $x \to 2$ болғанда қатынастың алымы $3 \cdot 2 + 4 = 10$ санына, ал бөлімі нөлге ұмтылады. Сондықтан берілген шек шексіз үлкен шама болады;

$$\lim_{\tilde{o} \to 2} \frac{3\tilde{o}+4}{\tilde{o}-2} = \infty;$$

б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\dfrac{\sin 3x}{\tilde{o}}=0,$ себебі шектелген функцияның $\left(|\sin 3x|\le 1\right)$ шексіз үлкен шамаға қатынасы шексіз аз шама болады.

Көптеген шектерді есептеуде $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандықтар кездеседі.

2-мысал. Шектерді табыңыз:

а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}\dfrac{\tilde{o}^2-5x+6}{\tilde{o}^2-3x+2};$ ә) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\tilde{o}};$

Шешуі: а) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз де, $(\tilde{o}-2)$- ге қысқартамыз:

$$\lim_{\tilde{o}\to 2}\frac{\tilde{o}^2-5x+6}{\tilde{o}^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=-1.$$

ә) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін алымының түйіндесіне көбейтеміз:

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\tilde{o}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3}{x(\sqrt{x+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Тақырып 5. Функцияның туындысы

1-мысал. Мына функциялардың туындысын табыңдар:

1. $y=\sin x^2$. Сонда $y'=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)'=\cos x^2\cdot 2x$.

2. $y=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{100},\quad y'=100\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(x+\dfrac{2}{x}\right)'=100\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right).$

3. $y=\ln^3(x+3),\quad y'=3\ln^2(x+3)\cdot(\ln(x+3))'=3\ln^2(x+3)\cdot\dfrac{1}{x+3}.$

4. $y=\ln\cos\dfrac{1-2x}{3}$

$$y'=\frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\cdot\left(\cos\frac{1-2x}{3}\right)'=\frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\cdot\sin\frac{1-2x}{3}\cdot\left(\frac{1-2x}{3}\right)'=\frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\cdot\sin\frac{1-2x}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

2-мысал. $x=\sqrt{2t-t^2}$, $y=\arcsin(t-1)$. Табу керек $\dfrac{dy}{dx}$.

Шешуі.

$$x'=\frac{1}{2\sqrt{2t-t^2}}\cdot(2-2t)=\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}.$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\cdot\frac{\sqrt{2t-t^2}}{1-t}=\frac{1}{1-t}.$$

Тақырып 6. Туындының көмегімен функцияны зерттеу

1-мысал. $y=x^2-4x+10$ функциясының монотонды аралықтарын табыңыз.

Шешуі. Функцияның туындысын табамыз: $y'=2x-4.$

Олай болса $x>2$ болғанда $y'>0,$ ал $x<2$ болғанда $y'<0,$ яғни $(-\infty;2)$ аралығында функция кемиді, ал $(2;\infty)$ аралығында өседі.

2-мысал. Ойыс және дөңес болатын интервалдарды, иілу нүктесін табу керек. $y = x^3 - 6x^2 + x - 12.$

Шешуі. $y' = 3x^2 - 12x + 1,$ $y'' = 6x - 12.$

Олай болса, $y'' = 0$, егер $x = 2$, $y'' < 0$ егер $x < 2$, $y'' > 0$, егер $x > 2$. Сонымен график дөңес, егер $x < 2$, ал $x > 2$ график ойыс. Ал $x = 2$ – иілу нүктесінің абсциссасы.

3-мысал. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ функциясының асимптоталарын табыңыздар.

Шешуі. Берілген функцияның үзіліс нүктесі $x = 1$, яғни $x = 1$ – вертикаль асимптота. $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty,$ сондықтан горизонталь асимптоталары жоқ. Көлбеу асимптоталарды іздейміз. Ол үшін

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$

Ендеше $y = x + 1$ түзуі көлбеу асимптота болады.

4-мысал. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 15$ функциясының [-4, 4] кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәнін табыңыздар.

Шешуі. $y'=3x^2+6x-9=0$ делік, бұдан $x=-3$ және $x=1$ екендігі шығады. Әрі бұл табылған кризистік нүктелер берілген аралықта жатады. $x=-4$, $x=-3$, $x=1$ және $x=4$ нүктелеріндегі функцияның мәндерін есептелік.

x	-4	-3	1	4
y	5	12	-20	61

Сонымен, қарастырылып отырған аралықтағы функцияның ең үлкен мәні 61-ге тең, ол кесіндінің оң жақ шеткі нүктесінде қабылданады, ал ең кішісі –20-ға тең және ол кесіндінің ішкі минимум нүктесінде қабылданады.

Тақырып 7. Анықталмаған интеграл

Мысалдар. 1.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{t^{21}}{42}+C = \frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$

2. $$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

3. $$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-\frac{3}{2}} x\cos x dx = \begin{vmatrix}\sin x = t\\ dt = \cos x dx\end{vmatrix} = \int t^{-\frac{3}{2}}dt = -2t^{-\frac{1}{2}dt}+C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$$

4. $$\int x^2e^{5x}dx = \begin{vmatrix}u = x^2; & dv = e^{5x}dx\\ du = 3xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}\end{vmatrix} = \frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \begin{vmatrix}u = x; & dv = e^{5x}dx\\ du = dx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}\end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}xe^{5x}-\frac{1}{5}\int e^{5x}dx\right) = \frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{25}xe^{5x}+\frac{2}{125}e^{5x} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right)$$

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

6. $$\int\sin(3x-5)dx = \frac{1}{3}\int\sin(3x-5)d(3x-5) = -\frac{1}{3}\cos(3x-5)+C.$$

7. $$\int\frac{x^4}{2+x^5}dx = \frac{1}{5}\int\frac{5x^4}{2+x^5}dx = \frac{1}{5}\int\frac{d(2+x^5)}{2+x^5} = \frac{1}{5}\ln\left|2+x^5\right|+C.$$

Тақырып 8. Анықталған интеграл

1-мысал.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \left\{\begin{matrix}x = \sin t;\\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2\end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

2-мысал. $\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix}x = u; dx = du\\ e^x dx = dv; v = e^x\end{vmatrix} = xe^x /_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x /_0^1 = e - e + 1 = 1$

3-мысал. y = x, y = x^2, x = 2 сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

Шешуі. Формула бойынша:

$$S = \int_1^2 x^2dx - \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

4-мысал. $\rho = 4\cos 2\varphi$ қисығымен шектелген фигура ауданын табайық.

Шешуі. Фигура ОХ және ОУ осьтеріне симметриялы болғандықтанауданның ¼ бөлігін санаймыз. $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

$$(1/4)S = (1/2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\varphi)d\varphi = 4(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi)\Big/_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi.$$

$S = 4\pi$.

Тақырып 9. Көп айнымалы функциялар

1-мысал. $u = x^{y^2 z}$ функциясының толық дифференциалын табыңыздар.

Шешуі.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Мысалы. $z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

2-мысал. $z = x^2 + y^2 x$ функциясының А(1, 2) нүктесіндегі $\overrightarrow{AB}$ векторының бағытымен туындысын табу керек. В (3, 0).

Шешуі. Алдымен_ $\overrightarrow{AB}$ векторын анықтаймыз

$\overrightarrow{AB}$ =(3-1; 0-2) = (2; -2) .

Оның модулін табамыз

$$\left|\overline{AB} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\right|.$$

z функциясының дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

А нүктесіндегі мәні: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4;$

$\overrightarrow{AB}$ векторының бағыттауыш косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Сонда $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Тақырып 10. Жай дифференциалдық теңдеулер

1-мысал. $xy' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыздар.

Шешуі.

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$xdy=-ydx$$
$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln y=-\ln x+C_0 \;\Rightarrow\; \ln y+\ln x=C_0 \;\Rightarrow\; \ln yx=C_0$$
$xy=e^{C_0}=C \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{C}{x}$ - жалпы шешімі.

2-мысал. $yy'=\dfrac{-2x}{\cos y}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыздар. *Шешуі.*

$$2\quad y\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x$$
$$y\cos y dy=-2xdx$$
$$\int y\cos y dy=-2\int xdx$$

Сол жақтағы интеграл бөлшектеп алынады:

$$\int y\cos y dy=\begin{Bmatrix} u=y; & dv=\cos y dy; \\ du=dy; & v=\sin y\end{Bmatrix}=y\sin y-\int\sin y dy=y\sin y+\cos y$$
$$y\sin y+\cos y=-x^2+C$$
$$y\sin y+\cos y+x^2+C=0$$

- дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі.

3-*мысал.* $\dfrac{y}{y'}=\ln y$, y(2) = 1 дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыздар.

Шешуі.

$$\frac{ydx}{dy}=\ln y$$
$$dx=\frac{\ln y dy}{y}$$
$$\int dx=\int\frac{\ln y dy}{y}$$
$$x+C=\int\ln y d(\ln y)$$
$$x+C=\frac{\ln^2 y}{2}$$

y(2) = 1шартын ескерсек $2+C=\dfrac{\ln^2 1}{2}; \;\Rightarrow\; 2+C=0; \;\Rightarrow\; C=-2;$

Сонда: $2(x-2)=\ln^2 y;$ немесе $y=e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - дербес шешімі.

4-*мысал.* Теңдеуді шешіңіздер: $y'=y^{2/3}$.

Шешуі.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x+C)^3$ - жалпы интеграл

$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ - жалпы шешімі.

5-*мысал.* Теңдеуді шешіңіздер: $y' = x(y^2+1)$.

Шешуі.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int\frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Тақырып 11. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер

1-*мысал.* Теңдеуді шешіңіздер: $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Шешуі.

$$2xe^{-x^2}dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}dx + \int\frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

2-*мысал.* Теңдеудің жалпы интегралы табыңыздар. $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$.

Шешуі. Бұл айнымалысы ажыратылатын теңдеу:

$$\frac{xdx}{x^2-1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0; \qquad \int\frac{xdx}{x^2-1} = -\int\frac{ydy}{y^2-1};$$

$$\ln|x^2-1| + \ln|y^2-1| = \ln C;$$

Жалпы интеграл: $(x^2-1)(y^2-1) = C$.

Тақырып 12. Сандық қатарлар

1-мысал. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіздер.

Шешуі. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, ал гармоникалық қатар $\sum \frac{1}{n}$ жинақталмайды, олай болса $\sum \frac{1}{\ln n}$ қатары да жинақталмайды.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ қатарын жинақтылыққа ззерттеңіздер.

Шешуі. $u_n = \frac{n}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$

Ендеше қатар жинақты.

3-мысал. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіздер.

Шешуі. $u_n = \frac{1}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

Ендеше қатар жинақты.

Тақырып 13. Функционалдық қатарлар

1. Дәрежелік қатарларды жуықтап есептеулерде қолдану.

1-мысал. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіздер.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Осы арадан $|x| < 1$ болса, қатар жинақты, ал $|x| > 1$ болса қатар жинақты емес.

X = 1 болса: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$ қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты.

X = -1 болса: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ гармоникалық қатар жинақты емес.

2-мысал. $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ қатарының жинақталу интералын табыңыздар.

Шешуі. Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$

шегі х- ке тәуелді емес, әрі 1-ден кіші , ендеше х- тің барлық мәнінде қатар жинақталады.

Тақырып 14. Ықтималдықтар теориясы

1-мысал. Урнаға 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Урнадан кез келген бір шар алынады. Сонда ақ шар пайда болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі . А-ақ шар пайда болуы болсын. Ықтималдықтың анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{20}.$$

2-мысал. Жәшікте 10-ақ, 5-қара, 3-қызыл,2-көк шар бар. Жәшіктен бір шар алғанда оның не ақ, не көк шар болу ықтималдығын табу керек.

Шешу. р(А+К) = р(А)+р(К) $= \frac{10}{20} \cdot \frac{2}{20} = \frac{3}{5}$;

3-*мысал.* Цехта 6 ер адам, 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельлегі нөмірлері бойынша 7 адам таңдап алынды. Таңдап алынған адамдардың ішінде 3 әйел бар болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Табельдегі нөмірлері бойынша барлығы 10 адамнан 7 адам таңдап алудың жалпы саны 10 элементен 7 элемент бойынша алынған терулер саны сияқты есептелінеді, яғни

$$n = C_{10}^{7} = \frac{10!}{10!3!}.$$

Ал 3 әйелді табельдік нөмірлері бойынша 4 әйелдің ішінен таңдап алудың саны

$$m_1 = C_4^3 = \frac{4!}{1!3!}.$$

Сондай-ақ 6 ер адамнан 4 ер адам таңдаудың саны

$$m_2 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!}.$$

Енді көбейту ережесін пайдалансақ таңдап алынған 7 адамның ішінде 3 әйел 4 ер адам болу мүмкіндіктерінің жалпы саны $m = m_1 m_2$.

Сонымен анықталғалы отырған ықтималдық

$$P = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{C_4^3 C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{1}{2}.$$

Тақырып 15. Кездейсоқ шамалар. Математикалық статистика элементтері

1-мысал. Әр жолы оқиғаның орындалу ықтималдығы 0,6 тең, 10 рет тәуелсіз сынақ кезінде х кездейсоқ шамасы үшін оқиғаның орындалу санының дисперсиясын табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша n=10, p=0,6, сонда q=1-p=1-0,6=0,4. Демек,

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4.$$

2-мысал. Таңдама мына вариациялық қатар түрінде берілген:

$\tilde{o}_i$	1	4	5
n_i	4	4	2

Барлық сипаттамаларын табу керек.

Шешуі. Таңдаманың көлемі n=10 және $x \le 1$ болса $n_x = 0$ (1-ден кіші варианталар жоқ).

F*(x)=0, ал $x < 4$ болса $n_x = 4$, F*(x)=0,4, т.с.с. есептеулер жүргізіп мына функцияны табамыз:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{åãåð} \quad x \le 1, \\ 0{,}4, & \text{åãåð} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}8, & \text{åãåð} \quad 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{åãåð} \quad x > 5. \end{cases}$$

Таңдаманың ортасы

$$\overline{x}_T = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{10} = 3$$

Таңдаманың дисперсиясы

$$D_T = \frac{4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{10} - 9 = 2{,}8\,.$$

Таңдаманың орташа квадраттық ауытқуы

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67\,.$$

Бірінші және екінші ретті бастапқы эмпирикалық моменттер

$$M_1 = \overline{x}_T\,, \qquad M_2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{10} = 11{,}8\,.$$

Бірінші, екінші, үшінші және төртінші ретті орталық эмпирикалық моменттер

$$m_1 = 0\,, \qquad m_2 = D_T\,,$$

$$m_3 = \frac{4 \cdot (1-3)^2 + 4 \cdot (4-3)^2 + 2 \cdot (5-3)^2}{10} = -1{,}2\,,$$

$$m_4 = \frac{4 \cdot (1-3)^4 + 4 \cdot (4-3)^4 + 2 \cdot (5-3)^4}{10} = 1{,}0\,.$$

Таңдаманың асимметриясы

$$a_S = \frac{m_3}{\sigma_T^3} = -\frac{1{,}2}{(1{,}67)^3} = -0{,}26\,.$$

Таңдаманың эксессі

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 = \frac{10}{(1{,}67)^4} - 3 = -1{,}72\,.$$

III БӨЛІМ
ТЕСТТЕР

$$$ 1. n – ретті анықтауыштың дұрыс емес қасиетін тап.

A) Анықтауыштың екі жатық (тік) жолының барлық сәйкес элементтері тең болса, онда оның мәні нөлге тең болады.

B) Анықтауыштың екі жатық (тік) жолының барлық сәйкес элементтерінің орнын алмастырсақ, онда оның таңбасы қарама- қарсы таңбаға өзгереді.

C) Анықтауыштың жатық (тік) жолдары оның сәйкес тік (жатық) жолдарымен орын алмастырсақ, онда оның мәні өзгереді.

D) Анықтауыштың жатық (тік) жолдары оның сәйкес тік (жатық) жолдарымен орын алмастырсақ, онда оның мәні өзгермейді.

E) Анықтауыштың екі жатық (тік) жолының барлық сәйкес элементтері пропорционал болса, онда оның мәні нөлге тең болады.

$$$ 2.Анықтауышты есепте: $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

A) 9 ;
B) -9 ;
C) 39 ;
D) 87 ;
E) 75 .

$$$ 3. Анықтауышты есепте: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

A) -1 ;
B) 1 ;
C) 0 ;
D) cos 2α ;
E) sin 2α .

$$$ 4. Анықтауышты есепте: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

A) -27 ;
B) 0 ;
C) 3 ;
D) - 3 ;
E) 27 .

$$$ 5. Анықтауыштың a $_{ij}$ элементінің A $_{ij}$ алгебралық толықтауышы неге тең?

A) $A_{ij} = M_{ij}$;
B) $A_{ij} = -M_{ij}$;
C) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;
D) $A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$;
E) $A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}$.

$$$ 6. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ анықтауышының A_{21} алгебралық толықтауышын тап.

A) 4 ;
B) -4 ;
C) 7 ;
D) -7 ;
E) 9 .

$$$ 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ анықтауышының A_{23} алгебралық толықтауышын тап.

A) 1 ;
B) -3 ;
C) 3 ;
D) -11 ;
E) 11 .

$$$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ анықтауышының M_{23} минорын тап.

A) 1 ;
B) -3;

C) 3;
D) -11;
E) 11.

$$$ 9. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ анықтауышының M_{21} минорын тап.
A) 4;
B) -4;
C) 7;
D) -7;
E) 9.

$$$ 10. Егер матрицаның жатық жолының саны тік жолының санына тең болса, онда ол . . . матрица деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) квадрат;
E) диагоналдық.

$$$ 11. Егер диагоналдық матрицаның барлық элементтері бірге тең болса, онда ол . . . матрица деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) квадрат;
E) диагоналдық.

$$$ 12. Егер квадрат матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса, онда ол . . . матрица деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) квадрат;
E) диагоналдық.

$$$ 13. Егер квадрат матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол . . . матрица деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) квадрат;
E) диагоналдық.

$$$ 14.Егер квадрат матрицаның анықтауышы нөлге тең болса, онда ол . . . матрица деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) квадрат;
E) диагоналдық.

$$$ 15. Егер A * B = B * A = E теңдігі орындалса , мұндағы E – бірлік матрица, онда B матрица A матрицасының . . . матрицасы деп аталады.
A) ерекше;
B) ерекше емес;
C) бірлік;
D) кері;
E) диагоналдық.

$$$ 16. $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$ теңдеуін шеш.
A) -8;
B) 10;
C) -10;
D) 0;
E) 8.

$$$ 17. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & a \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$ анықтауышын есепте.
A) $2a$;
B) $-2a$;
C) 0;
D) a;
E) $-a$.

$$$ 18. $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}$ матрицаларының қосындысын тап.

A) $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 10\end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 6 & 0\end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix}5 & 5\\ 6 & 10\end{pmatrix}$;

E) $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 0 & 10\end{pmatrix}$.

$$$ 19.Матрицаның нөлге тең емес минорының ең жоғарғы реті оның ... деп аталады.
A) рангісі;
B) сызықтық комбинациясы;
C) сызықтық тәуелділігі;
D) сызықтық тәуелсіздігі;
E) алгебралық толықтауышы.

$$$ 20. Біртекті емес сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйенің негізгі матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болуы қажетті және жеткілікті.
A) Пифагор теоремасы;
B) Лопиталь теоремасы;
C) Лагранж теоремасы;
D) Ферма теоремасы;
E) Кронекер-Капелли теоремасы.

$$$ 21. Егер сызықтық теңдеулер жүйесіндегі бос мүшелерінің кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда ол жүйе ... сызықтық теңдеулер жүйесі деп аталады.
A) үйлесімді;
B) үйлесімсіз;
C) біртекті емес;
D) біртекті;
E) анықталған.

$$$ 22. Егер сызықтық теңдеулер жүйесіндегі бос мүшелерінің бәрі нөлге тең болса, онда ол жүйе ... сызықтық теңдеулер жүйесі деп аталады.
A) үйлесімді;
B) үйлесімсіз;
C) біртекті емес;
D) біртекті;
E) анықталған.

$$$ 23. Егер $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ... , $x_n=\alpha_n$- сандар жиыны теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің бәрін қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны сызықтық теңдеулер жүйесінің ... деп аталады.
A) рангісі;
B) шешімі;
C) миноры;
D) кеңейтілген матрицасы;
E) негізгі матрицасы.

$$$ 24. Крамер ережесі

A) $x_i=\dfrac{\Delta}{\Delta_{x_i}},(i=1,2,..n);$

B) $x_i=-\dfrac{\Delta}{\Delta_{x_i}},(i=1,2,..n);$

C) $x_i=\dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta},(i=1,2,...n);$

D) $x_i=-\dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta},(i=1,2,..n);$

E) $x_i=\Delta+\Delta_{x_i},(i=1,2,..n)$.

$$$ 25. Кері матрицаны табу формуласы

A) $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11}A_{12}A_{13}\\ A_{21}A_{22}A_{23}\\ A_{31}A_{32}A_{33}\end{pmatrix};$

B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{pmatrix}$;

C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}$;

D) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}$;

E) $A^{-1} = \Delta(A) \begin{pmatrix} A_{11}A_{2}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}$.

$$$ 26. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын тап.

A) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

B) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

C) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

D) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

E) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$$ 27. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шеш:

A) (-1; -2);
B) (1; -2);
C) (-1; 2);
D) (0; 2);
E) (1; 2).

$$$ 28. $\begin{cases} 3x - 5y + 21 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шеш.

A) (-1; 0);
B) (-2; 3);
C) (-2; -3);
D) (2; 3);
E) (2; -3).

$$$ 29. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ берілген. 2A+5B табыңдар.

A) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -12 \end{pmatrix}$;

E) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$.

$$$ 30. Қатардың $u_n = \frac{n}{10^n + 1}$ жалпы мүшесі берілген. Қатардың алғашқы төрт мүшесін жазыңыз.

A) $\frac{4}{10^4 + 1}$;

B) $\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots$;

C) $\frac{4}{10001}$;

D) шексіз;

E) $\frac{10}{10001}$.

$$$ 31. Гиперболаның канондық теңдеуі.

A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

B) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

C) $y^2 = 2px$

D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

E) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

$$$ 32. Эллипстің канондық теңдеуі.

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

C) $y^2=2px$

D) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

E) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$$ 33. Параболаның канондық теңдеуі.

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

C) $y^2=2px$

D) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

E) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

$$$ 34. Егер $a=5, b=3$ болса, гиперболаның канондық теңдеуін жаз.

A) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=-1$;

B) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$

C) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

E) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

$$$ 35. Егер $a=5, b=3$ болса, эллипстің канондық теңдеуін жаз.

A) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$,

B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=-1$

C) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

E) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

$$$ 36. Центрі координаталар басында, радиусы R-ге тең шеңбердің теңдеуін жаз.

A) $x^2+y^2=R^2$

B) $x + y = R$

C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

D) $x^2+y^2=R$

E) $x^2-y^2=R^2$.

$$$ 37. Центрі (5 ; 3) болатын, радиусы R =4 тең шеңбердің теңдеуін жаз.

A) $(x+5)^2+(y+3)^2=16$

B) $(x-5)^2+(y-3)^2=4$

C) $(x-5)^2+(y-3)^2=16$

D) $(x+5)^2+(y+3)^2=4$

E) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=16$.

$$$ 38. $y^2 = 4x$ параболасының фокусын тап.

A) F (4 ; 0) ;

B) F (2 ; 0) ;

C) F (- 4; 0) ;

D) F (- 2 ; 0)

E) F (1 ; 0) .

$$ 39. $y^2 = 4x$ параболаның директрисасының теңдеуін тап.

A) x – 1 = 0 ;

B) x + 1 = 0 ;

C) x + 2 = 0 ;

D) x – 2 = 0 ;

E) x + 4 = 0 .

$$$ 40. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболаның асимптоталарының теңдеуін тап.

A) $y=\pm\frac{4}{9}x$

B) $y=\pm\frac{9}{4}x$

C) $y=\pm\frac{3}{2}x$

D) $y=\pm\frac{2}{3}x$

E) $y=\pm x$.

$$$ 41. $(x+2)^2+(y-5)^2=9$ теңдеуімен берілген шеңбердің центрінің координаталарын және радиусын тап.

A) R=9 ; C (-2; 5) ;
B) R= 3 ; C (2; -5) ;
C) R =3 ; C (-2; 5) ;
D) R = 9 ; C (2; -5) ;
E) R = 3 ; C (2 ; 5).

$$$ 42. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің эксцентриситетін тап.

A) 4/5 ;
B) 5/4 ;
C) 3/5 ;
D) 5/3 ;
E) 4/3 .

$$$ 43. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің эксцентриситетін тап.

A) 3/5 ;
B) 5/3 ;
C) 5/4 ;
D) 4/5;
E) 4/3.

$$$ 44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+n}$ қатардың алғашқы төрт мүшесін жазыңыз.

A) $\frac{1}{11}+\frac{2}{102}+\frac{3}{1003}+\frac{4}{10004}+...$;

B) $\frac{1}{10}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\frac{4}{14}$;

C) $\frac{4}{10004}$;

D) $\frac{4}{14}$;

E) $\frac{10}{10004}$.

$$$ 45. Жазықтықтағы екі нүктенің ара қашықтығының формуласын тап.

A) $d=\sqrt{(x_1-x_2)-(y_1-y_2)}$

B) $d=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

C) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

D) $d=x_2\cdot x_1+y_2\cdot y_1$

E) $d=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$.

$$$ 46. Кесіндінің ортасының координаталарын табу формуласы.

A) $x=\frac{x_1-x_2}{2};\ \ y=\frac{y_1-y_2}{2}$

B) $x=\frac{x_1\cdot x_2}{2}; y=\frac{y_1\cdot y_2}{2}$

C) $x=x_1+x_2;\quad y=y_1+y_2$

D) $x=x_1-x_2;\quad y=y_1-y_2$

E) $x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

$$$ 47. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласы.

A) $x=\frac{x_1+x_2}{2}; y=\frac{y_1+y_2}{2}$

B) $x=\frac{x_1+x_2}{1+\lambda}; y=\frac{y_1+y_2}{1+\lambda}$

C) $x=\frac{\lambda x_1}{x_2}; y=\frac{\lambda y_1}{y_2}$

D) $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

E) $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1-\lambda}; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1-\lambda}$.

$$$ 48. A(x_1; y_1) және B(x_2; y_2) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін тап.

A) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

B) $\frac{x+x_1}{x_2-x_1}=\frac{y+y_1}{y_2-y_1}$;
C) $\frac{x-x_1}{x_2+x_1}=\frac{y-y_1}{y_2+y_1}$;
D) $\frac{x}{x_2-x_1}=\frac{y}{y_2-y_1}$;
E) $\frac{x+x_1}{x_2+x_1}=\frac{y+y_1}{y_2+y_1}$.

$$$ 49. x + y – 5 = 0 түзуінің бұрыштық коэффициентін анықта.
A) 1,
B) 5,
C) -1,
D) -5,
E) 0.

$$$ 50. Бұрыштық коэффициентпен және берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі.
A) $y=k\cdot(x-x_0)$
B) $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$
C) $k\cdot(y-y_0)=x-x_0$
D) $y+y_0=k\cdot(x+x_0)$
E) $y-y_0=k\cdot(x+x_0)$.

$$$ 51. A (3 ; 1) нүктесі арқылы өтетін, бұрыштық коэффициенті k=2 болатын түзудің теңдеуін тап.
A) $y=2x+5$;
B) $y=-2x+5$;
C) $y=2x-5$;
D) $y=2x+1$;
E) $y=2x-1$.

$$$ 52. $3y+5=0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін тап.
A) 0,
B) 3,
C) 5,
D) -5/3,
E) -3/5.

$$$ 53. A (3; 1) және B(4; 2) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін тап.
A) $x+y+2=0$;
B) $x-y+2=0$;
C) $x+y-2=0$;
D) $x-y-2=0$;
E) $x-y-4=0$.

$$$ 54. A(2; 5) және B(7; 6) нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін тап.
A) 5,
B) -5,
C) 0,
D) -1/5,
E) 1/5.

$$$ 55. Екі түзудің параллельдік шарты.
A) $k_2=\frac{1}{k_1}$;
B) $k_2=-\frac{1}{k_1}$;
C) $k_2=k_1$;
D) $k_2=-k_1$;
E) 0.

$$$ 56. Екі түзудің перпендикулярлық шарты.
A) $k_2=\frac{1}{k_1}$;
B) $k_2=-\frac{1}{k_1}$;
C) $k_2=k_1$;
D) $k_2=-k_1$;
E) 0.

$$$ 57. $y=k_1x+b_1$ және $y=k_2x+b_2$ түзулерінің арасындағы сүйір бұрышты табу формуласы.

A) $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$

B) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

C) $tg\varphi = \dfrac{k_2 + k_1}{1 - k_1 k_2}$

D) $tg\varphi = \dfrac{k_2 + k_1}{1 + k_1 k_2}$

E) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2}$.

$$$ 58. A(-1; 3) нүктесінен $3x - 4y + 40 = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтықты тап.

A) 11,
B) -5,
C) -11,
D) 5,
E) 6.

$$$ 59. $M(x_0; y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық.

A) $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

B) $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

C) $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$;

D) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

E) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2}$.

$$$ 60. M(2; -1) нүктесінен $3x + 4y - 22 = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтықты тап.

A) 20,
B) 10,
C) 4,
D) -4,
E) 2.

$$$ 61.Жазықтықтың кесінділік теңдеуі.

A) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

B) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;

C) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$;

D) $Ax + By + Cz + D = 0$;

E) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$.

$$$ 62. Жазықтықтың жалпы теңдеуі .

A) $Ax + By + Cz + D = 0$;

B) $Ax + By + C = 0$;

C) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;

D) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

E) $Ax + By + Cz = 0$.

$$$ 63. $M(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық.

A) $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

B) $d = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

C) $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

D) $d = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{A^2 + B^2 + C^2}$;

E) $d = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}$.

$$$ 64. Түзудің жалпы теңдеуі.

A) $Ax + By + Cz + D = 0$;

B) $Ax + By + C = 0$;

C) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;

D) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

E) $Ax + By + Cz = 0$.

$$$ 65. $y^2 = 2px$ - бұл . . . канондық теңдеуі.

A) эллипстің;
B) гиперболаның ;
C) шеңбердің ;
D) параболаның ;
E) жазықтықтың .

$$$ 66. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - бұл . . . канондық теңдеуі.

A) эллипстің ;
B) гиперболаның ;
C) шеңбердің ;
D) параболаның ;
E) жазықтықтың .

$$$ 67. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - бұл . . . канондық теңдеуі.

A) эллипстің ;
B) гиперболаның ;
C) шеңбердің ;
D) параболаның ;
E) жазықтықтың .

$$$ 68. M(3; 5; -8) нүктесінен 6 x – 3 y + 2 z – 28 = 0 жазықтығына дейінгі ара қашықтықты тап.

A) 41 ;
B) 1 / 7 ;
C) 36 / 7 ;
D) 13 / 7 ;
E) 41 / 7 .

$$$ 69. A(3; 8) және B(-5; 14) нүктелерінің ара қашықтығын тап.

A) 15 ;
B) 10 ;
C) 8 ;
D) 0 ;
E) -10 .

$$$ 70. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ түзуінің параллельдік шарты.

A) $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{c}{n}$;
B) $A = l; B = m; C = n$;
C) $Al = Bm = Cn$;
D) $Al + Bm + Cn = 0$;
E) $Al - Bm - Cn = 0$.

$$$ 71. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ түзуінің перпендикулярлық шарты.

A) $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{c}{n}$;
B) $A = l; B = m; C = n$;
C) $Al = Bm = Cn$;
D) $Al + Bm + Cn = 0$;
E) $Al - Bm - Cn = 0$.

$$$ 72. $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығымен $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ түзуінің арасындағы бұрышты табу формуласы .

A) $\cos\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$;
B) $tg\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$;
C) $\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$;
D) $\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$;
E) $\cos\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$;

$$$ 73. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ және $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ түзулерінің арасындағы сүйір бұрышын табу формуласы .

A) $\sin\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

B) $\cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

C) $\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

D) $tg\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

E) $\sin\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

$$$ 74. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ және $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ түзулерінің перпендикулярлық шарты

A) $l_1=l_2; m_1=m_2; n_1=n_2;$

B) $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$

C) $l_1l_2-m_1m_2-n_1n_2=0;$

D) $l_1l_2=m_1m_2=n_1n_2;$

E) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$

$$$ 75. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ және $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ түзулерінің параллельдік шарты

A) $l_1=l_2; m_1=m_2; n_1=n_2;$

B) $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$

C) $l_1l_2-m_1m_2-n_1n_2=0;$

D) $l_1l_2=m_1m_2=n_1n_2;$

E) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$

$$$ 76. $\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ - бұл . . . теңдеуі

A) жазықтықтың параметрлік,

B) шеңбердің параметрлік,

C) түзудің параметрлік,

D) түзудің канондық,

E) жазықтықтың канондық.

$$$ 77. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ - бұл . . . теңдеуі

A) жазықтықтың параметрлік,

B) шеңбердің параметрлік,

C) түзудің параметрлік,

D) түзудің канондық,

E) жазықтықтың канондық.

$$$ 78. $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$ жазықтықтарының арасындағы сүйір бұрышты табу формуласы

A) $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

B) $\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

C) $\sin\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

D) $\sin\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

E) $tg\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

$$$ 79. $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$

жазықтықтарының арасындағы бұрышты табу формуласы

A) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

B) $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

C) $\sin\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

D) $\sin\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

E) $tg\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

$$$ 80 Екі жазықтықтың перпендикулярлық шарты

A) $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$;
B) $A_1 = A_2; B_1 = B_2; C_1 = C_2$;
C) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;
D) $A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 = 0$;
E) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$$$ 81 Екі жазықтықтың параллельдік шарты

A) $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$;
B) $A_1 = A_2; B_1 = B_2; C_1 = C_2$;
C) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;
D) $A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 = 0$;
E) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

$$$ 82. Коши белгісі. Егер $u_1+u_2+...+u_n+...$ қатары үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = C$ шегі бар болса, онда C<1 болғанда қатар

A) Жинақсыз;
B) Жинақты;
C) Абсолют жинақты;
D) Жинақталуы мүмкін;
E) Жинақталмауы мүмкін.

$$$ 83. Егер $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ екі түзуі үшін $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ шарты орындалса, онда екі түзу . . .

A) беттеседі;
B) параллель болады;
C) перпендикуляр болады;
D) қиылысады;
E) айқас түзулер болады.

$$$ 84. Егер $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ екі түзуі үшін $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ шарты орындалса, онда екі түзу . . .

A) беттеседі;
B) параллель болады;
C) перпендикуляр болады;
D) қиылысады;
E) айқас түзулер болады.

$$$ 85. Егер $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ екі түзуі үшін $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ шарты орындалса, онда екі түзу . . .

A) беттеседі;
B) параллель болады;
C) перпендикуляр болады;
D) қиылысады;
E) айқас түзулер болады.

$$$ 86. $12x - 5y - 65 = 0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін тап.

A) $k = -\dfrac{12}{5}$;
B) $k = -\dfrac{5}{12}$;
C) $k = \dfrac{5}{12}$;
D) $k = -\dfrac{12}{65}$;
E) $k = \dfrac{12}{5}$.

$$$ 87. A(-3;5) және B(7; -2) нүктелері арқылы жүргізілген түзудің теңдеуін тап.

A) $7x-10y+29=0$;

B) $7x+10y+29=0$;

C) $7x+10y-29=0$;

D) $7x-10y+30=0$;

E) $7x+10y-30=0$.

$$$ 88. Коши белгісі. Егер $u_1+u_2+...+u_n+...$ қатары үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$ шегі бар болса, онда C>1 болғанда қатар

A) Жинақсыз;

B) Жинақты;

C) Абсолют жинақты;

D) Жинақталуы мүмкін;

E) Жинақталмауы мүмкін.

$$$ 89. A (4;-3) және B(2;5) нүктелері арқылы жүргізілген AB кесіндісінің ортасының координаталарын тап.

A) (3;4) ;

B) (3;-1) ;

C) (3;1) ;

D) (3;-4) ;

E) (0;0) .

$$$ 90. A (13;-1) және B (-2;7) нүктелерін ара қашықтығын тап.

A) 15 ;

B) 14 ;

C) 16 ;

D) 17 ;

E) 13 .

$$$ 91. Тік бұрышты координаталар жүйесінен полярлық координаталар жүйесіне көшу формуласы

A) $x=r\sin\varphi;\ \ y=r\cos\varphi$

B) $x=r\cos\varphi;\ \ y=r\sin\varphi$

C) $r=\sqrt{x^2+y^2};\ tg\varphi=\dfrac{y}{x}$

D) $r=\sqrt{x^2-y^2};\ \ tg\varphi=\dfrac{x}{y}$

E) $x=\cos\varphi;\ \ y=\sin\varphi$.

$$$ 92. Полярлық координаталар жүйесінен тік бұрышты координаталар жүйесіне көшу формуласы

A) $x=r\sin\varphi;\ \ y=r\cos\varphi$

B) $x=r\cos\varphi;\ \ y=r\sin\varphi$

C) $r=\sqrt{x^2+y^2};\ tg\varphi=\dfrac{y}{x}$

D) $r=\sqrt{x^2-y^2};\ \ tg\varphi=\dfrac{x}{y}$

E) $x=\cos\varphi;\ \ y=\sin\varphi$.

$$$ 93. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталған бетті . . . деп атайды

A) сфера;

B) бір қуысты гипербалоид;

C) екі қуысты гиперболоид;

D) эллипсоид;

E) эллипстік параболоид.

$$$ 94. $x^2+y^2+z^2=1$ теңдеуімен анықталған бетті . . . деп атайды

A) сфера;

B) бір қуысты гипербалоид;

C) екі қуысты гиперболоид;

D) эллипсоид;

E) эллипстік параболоид.

$$$ 95. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ теңдеуімен анықталған бетті . . . деп атайды

A) сфера;

B) бір қуысты гипербалоид;

C) екі қуысты гиперболоид;

D) эллипсоид;

E) эллипстік параболоид.

$$$ 96. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ теңдеуімен анықталған бетті . . . деп атайды
A) сфера;
B) бір қуысты гипербалоид;
C) екі қуысты гиперболоид;
D) эллипсоид;
E) эллипстік параболоид.

$$$ 97. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ теңдеуімен анықталған бетті . . . деп атайды
A) сфера;
B) бір қуысты гипербалоид;
C) екі қуысты гиперболоид;
D) эллипсоид;
E) эллипстік параболоид.

$$$ 98. $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ қатары
A) Дәрежелік қатар;
B) Функционалдық қатар;
C) Сан қатары;
D) Дәрежелік функция;
E) Жинақты қатар.

$$$ 99. A (6;8) және B (4;6) нүктелері арқылы жүргізілген AB кесіндісінің ортасының координаталарын тап
A) (5;7);
B) (10;14);
C) (1;-1);
D) (2;-2);
E) (10;-14).

$$$ 100. Координата басынан A (-3;-4) нүктесіне дейінгі ара қашықтықты тап.
A) -3;
B) -4;
C) -5;
D) 5;
E) 4.

$$$ 101. $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$ функционалдық қатары
A) Дәрежелік қатар;
B) Сан қатары;
C) Тейлор қатары;
D) Маклорен қатары;
E) Дәрежелік функция.

$$$ 102. $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$ векторының ұзындығы неге тең ?
A) $|a|=a_x^2+a_y^2+a_z^2$;
B) $|a|=\sqrt{a_x+a_y+a_z}$;
C) $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;
D) $|a|=a_x+a_y+a_z$;
E) $|a|=a_x-a_y-a_z$.

$$$ 103. Егер $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ векторлары үшін $a_x=b_x;a_y=b_y;a_z=b_z$ болса, онда ол векторлар . . . болады
A) коллинеар;
B) тең;
C) ортогональ;
D) бағыттас;
E) қарама-қарсы бағытталған.

$$$ 104. Егер $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$ векторлары үшін $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ болса, онда ол векторлар . . . болады
A) коллинеар;
B) тең;
C) ортогональ;
D) бағыттас;
E) қарама-қарсы бағытталған.

$$$ 105. Коллинеар векторлар дегеніміз

A) бір немесе параллель түзулерде жататын векторлар;

B) бағыты мен ұзындықтары бірдей векторлар;

C) бір жазықтықта жататын векторлар;

D) бір немесе параллель жазықтықтарда жататын векторлар;

E) бірлік векторлар.

$$$ 106. $\bar{a}=(2;1;0)$ және $\bar{b}=(3;-2;-1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін тап.

A) 4;

B) $(6;-2;0)$;

C) (5;-1;-1);

D) (2;-7;-1);

E) (-1;2;-7).

$$$ 107. Үш вектордың компланарлық шарты

A) үш вектордың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең;

B) үш вектордың векторлық көбейтіндісі нөлге тең;

C) үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең;

D) үш вектордың қосындысы нөлге тең;

E) үш вектордың көбейтіндісі нөлге тең.

$$$ 108. $\vec{a}=(2;1;0)$ және $\vec{b}=(3;-2;-1)$ векторларының скалярлық көбейтіндісін тап.

A) 4;

B) 8;

C) 3;

D) 9;

E) 0.

$$$ 109. $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ және $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін тап.

A) 11;

B) 21;

C) 0;

D) 3;

E) -21.

$$$ 110. $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ векторының бағыттауыш косинусын $\cos\alpha$ тап.

A) $\cos\alpha=\frac{8}{9}$;

B) $\cos\alpha=-\frac{4}{9}$;

C) $\cos\alpha=\frac{1}{9}$;

D) $\cos\alpha=1$;

E) $\cos\alpha=0$.

$$$ 111. $|\bar{a}|=5$; $|\bar{b}|=6$; $\varphi=60^0$ берілген. Табу керек: $\bar{a}\cdot\bar{b}$

A) 30;

B) 15;

C) $15\sqrt{2}$;

D) $15\sqrt{3}$;

E) 0.

$$$ 112. $\vec{a}=(3;-6;2)$; $\vec{b}=(-2;-1;2)$ берілген. Табу керек: $\vec{a}+2\vec{b}$

A) (1; -7; 0);

B) (7; -8; 6) ;

C) (-1; -8; 6);

D) (-1; 8; 6);

E) (-1; 8; 2).

$$$ 113. Егер $\vec{a}\times\vec{в}=0$ болса, онда . . . болады.

A) екі вектор перпендикуляр;

B) екі вектор параллель;

C) екі вектор тең;

D) екі вектор қарама-қарсы;

E) екі вектор бірдей бағытталған.

$$$ 114. Егер $\vec{a} \cdot \vec{в} = 0$ болса онда . . . болады.
A) екі вектор перпендикуляр;
B) екі вектор параллель;
C) екі вектор тең;
D) екі вектор қарама-қарсы;
E) екі вектор бірдей бағытталған.

$$$ 115. Екі вектордың перпендикулярлық шарты.
A) екі вектордың аралас көбейтіндісі;
B) екі вектордың қосындысы нөлге тең;
C) екі вектордың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең;
D) екі вектордың векторлық көбейтіндісі нөлге тең;
E) екі вектордың көбейтіндісі нөлге тең.

$$$ 116. Екі вектордың параллельдік шарты.
A) екі вектордың аралас көбейтіндісі;
B) екі вектордың қосындысы нөлге тең;
C) екі вектордың скалярлық көбейтіндісі нөлге тең;
D) екі вектордың векторлық көбейтіндісі нөлге тең;
E) екі вектордың көбейтіндісі нөлге тең.

$$$ 117. Егер вектордың параллельдік шарты.
A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$
B) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$;
C) $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
D) $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$;
E) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$.

$$$ 118. Екі вектордың перпендикулярлық шарты.
A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$
B) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$;
C) $\vec{a} \perp \vec{b}$;
D) $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$;
E) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$.

$$$ 119. $\vec{a}$ векторының l осіндегі проекциясы неге тең ?
A) $пр_l \ \bar{a} = |\bar{a}| \sin \varphi$;
B) $пр_l \ \bar{a} = |l| \sin \varphi$;
C) $пр_\ell \ \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi$;
D) $пр_l \ \bar{a} = |l| \cos \varphi$;
E) $пр_l \ \bar{a} = 0$.

$$$ 120. Егер $\vec{a}$ векторы l осіне перпендикуляр болса, онда оның l осіндегі проекциясы неге тең ?
A) $пр_l \ \bar{a} = |\bar{a}| \sin \varphi$;
B) $пр_l \ \bar{a} = |l| \sin \varphi$;
C) $пр_\ell \ \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi$;
D) $пр_l \ \bar{a} = |l| \cos \varphi$;
E) $пр_l \ \bar{a} = 0$.

$$$ 121. $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z,)$ векторларының скалярлық көбейтіндісі неге тең ?
A) $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y$;
B) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$;
C) $\bar{a} \times \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;
D) $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;
E) $|\bar{a} \cdot \bar{b}| = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$$$ 122. $\bar{a}(4;-2;-4)$ және $\bar{b}(6;-3;2)$ векторларының скалярлық көбейтіндісін тап.
A) 1;
B) 20;
C) 22;
D) 21;
E) -20.

$$$ 123. $\bar{a}(3;-3;1)$, $\bar{b}(4;0;-1)$ және $\bar{\tilde{n}}(2;-1;-2)$ векторларының аралас көбейтіндісін тап.
A) -25;
B) 25;
C) 37;
D) -37;
E) -11.

$$$ 124. $|\vec{a}| = 2$ және $\vec{a}$ векторы l осімен жасайтын бұрышы 60^0. Табу керек: $np_l\vec{a}$
A) 2;
B) -2;
C) 1;
D) -1;
E) $\sqrt{3}$.

$$$ 125. Егер $np_l\,\bar{a} = 0$ болса, онда . . .
A) $\vec{a} \parallel l$;
B) $\vec{a} \perp l$;
C) $\vec{a} = l$;
D) $\vec{a} > l$;
E) $\vec{a} < l$.

$$$ 126. Егер $\vec{a}$ векторының l осіндегі проекциясы нөлге тең болса, онда олар ...болады.
A) тең;
B) параллель;
C) бірдей бағытталған;
D) қарама-қарсы бағытталған;
E) перпендикуляр.

$$$ 127. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмның ауданы неге тең ?
A) $S = \vec{a}\,\vec{b}$;
B) $S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;
C) $S = \frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}$;
D) $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;
E) $S = \left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|$..

$$$ 128. Компланар емес $\vec{a}, \vec{b}$ және $\bar{c}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелепипедтің көлемі неге тең ?
A) $V = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{\tilde{n}}\right|$;
B) $V = \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{\tilde{n}}\right|$;
C) $V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{\tilde{n}}\right|$;
D) $V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{\tilde{n}}\right|$;
E) $V = \left|a+b)\tilde{n}\right|$..

$$$ 129. Компланар емес $\vec{a}, \vec{b}$ және $\bar{c}$ векторлары арқылы тұрғызылған пирамиданың көлемі неге тең ?
A) $V = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{\tilde{n}}\right|$;
B) $V = \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{\tilde{n}}\right|$;
C) $V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{\tilde{n}}\right|$;
D) $V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{\tilde{n}}\right|$;
E) $V = \left|a+b)c\right|$.

$$$130. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары арқылы тұрғызылған үшбұрыштың ауданы неге тең?

A) $S = \vec{a}\,\vec{b};$

B) $S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|;$

C) $S = \frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b};$

D) $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|;$

E) $S = \left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|..$

$$$ 131. Егер екі вектор бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда ол векторлар . . . деп аталады?

A) коллинеар;
B) компланар;
C) бірлік;
D) перпендикляр;
E) тең.

$$$ 132. Егер үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда ол векторлар . . . деп аталады?

A) коллинеар;
B) компланар;
C) бірлік;
D) перпендикляр;
E) тең.

$$$ 133. Егер вектордың ұзындығы бірге тең болса, онда ол . . . вектор деп аталады.

A) коллинеар ;
B) компланар ;
C) бірлік ;
D) перпендикуляр ;
E) тең .

$$$ 134. Нөлдік емес вектордың бағыттауыш косинустарының квадраттарының қосындысы неге тең ?

A) 0 ;
B) $\vec{a}$;
C) $|\vec{a}|$;
D) 1 ;
E) - $|\vec{a}|$.

$$$ 135. $\vec{a} = \{3;4;7\}$ және $\vec{b} = \{2;-5;2\}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін тап .

A) 40 ;
B) -40 ;
C) 0 ;
D) 1 ;
E) 5 .

$$$ 136. m- нің қандай мәнінде $\vec{a} = \{m;1;0\}$ және $\vec{b} = \{3;-3;4\}$ векторлары перпендикуляр болады ?

A) m = - 1 ;
B) m = 3 ;
C) m = - 3 ;
D) m = 4 ;
E) m = 1 .

$$$ 137. $\vec{a} = \{2;-1;-1\}$; $\vec{b} = \{1;3;-1\}$ және $\vec{c} = \{1;1;0\}$ векторларының аралас көбейтіндісін тап .

A) 5 ;
B) 7;
C) 3;
D) -1;
E) 0.

$$$ 138. $\vec{a} = \{6;3;-2\}$ және $\vec{b} = \{3;-2;6\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограммның ауданын тап .

A) 7 кв. бірлік;
B) 49 кв. бірлік;
C) 5 кв. бірлік;
D) 48 кв. бірлік;
E) 46 кв. бірлік.

$$$ 139. y = $x^3 - 12x^2$ қисығының дөңес аралығын тап.

A) $(-\infty; 4)$;

B) $(4;+\infty)$;

C) $(-\infty; 0) \cup (0; 4)$;

D) (0 ; 4);

E) $(-\infty; +\infty)$.

$$$ 140 . y = $x^3 - 3x^2$ қисығының дөңес аралығын тап.

A) $(1;+\infty)$;

B) $(-\infty;1)$;

C) (0 ; 2);

D) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

E) $(2;+\infty)$.

$$$ 141. A(5;2) нүктесінен 3 x – 4 y + 4 = 0 түзуіне дейінгі ара қашықтықты тап.

A) 2,3;

B) 2,2;

C) 2;

D) 1,2;

E) 13.

$$$ 142. Төмендегі формулалардың қайсысы дұрыс ?

A) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$;

B) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin kx}{x} = k$;

C) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+kx) = e^k$;

D) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

E) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

$$$ 143. $y = 3^{\sqrt{1-x^2}}$ функциясының анықталу облысын тап.

A) $(-\infty; +\infty)$;

B) $(-\infty; 1]$;

C) $(-\infty; -1)$;

D) [-1 ; 1];

E) [0 ; 1].

$$$ 144. $\int_0^1 (1-2x)\,dx$ интегралын есепте .

A) 0 ;

B) -1 ;

C) -1/2 ;

D) 1 ;

E) 1/2 .

$$$ 145. $y = \frac{x}{6x-3}$ функциясының анықталу облысын тап.

A) $(-\infty; 2)$;

B) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$;

C) $(-\infty; +\infty)$;

D) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

E) (- 2 ; 2) .

$$$ 146. y = f (x) функциясының туындысының формуласын тап .

A) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x}$;

B) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

C) $y' = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\Delta x}$;

D) $y' = \frac{-f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x}$;

E) $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$$ 147. y = sin 2 x функциясы берілген . $f'(\frac{\pi}{4})$ - ті тап .

A) cos 2 x;

B) 0;

C) 2;

D) -2;

E) 1.

$$$ 148 . Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы :

A) $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_n}$;

B) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n}$;

C) $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$;

D) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{C_n}}$;

E) $R = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{C_n}}$.

$$$ 149. z=f(x,y) функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

A) $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$;

B) $\Delta_x z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$;

C) $\Delta_y z = f(x-\Delta x, y) - f(x,y)$;

D) $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;

E) $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

$$$ 150. Қатар жинақтылығының қажетті шарты

A) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$;

B) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$;

C) $\lim_{n\to\infty} S_n = S$;

D) егер қатар жинақты болса, онда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

E) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

$$$ 151. Бірінші тамаша шекті тап .

A) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$;

B) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

C) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$;

D) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x}{x} = 1$;

E) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \infty$.

$$$ 152 Екінші тамаша шекті тап.

A) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^x = e$;

B) $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x = e$;

C) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$;

D) $\lim_{x\to 0}(1+x)^x = e$;

E) $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$.

$$$ 153. Шектің мәнін тап : $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x$

A) 2;

B) 1 / 2;

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

E) 1.

$$$ 154.Шектің мәнін тап : $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

A) 0;

B) -1;

C) ∞;

D) 1;

E) π.

$$$ 155. Шектің мәнін тап : $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x}$

A) 0;

B) -1;

C) ∞;

D) π;

E) 1.

$$$ 156.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}$

A) 0;
B) -1;
C) 1;
D) π;
E) ∞.

$$$ 157.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

A) e;
B) 1;
C) 0;
D) ∞;
E) -1.

$$$ 158.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^{x}$

A) e ;
B) -1;
C) 0;
D) ∞;
E) 1.

$$$ 159. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ болса, онда y= f (x) функциясы . . . функция деп аталады.

A) шексіз үлкен;
B) шексіз аз;
C) монотонды;
D) үзіліссіз;
E) өспелі.

$$$ 160. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ болса, онда y = f (x) функциясы . . . функция деп аталады.

A) шексіз үлкен;
B) шексіз аз;
C) монотонды;
D) үзіліссіз;
E) өспелі.

$$$ 161.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}$

A) 2;
B) 1;
C) e;
D) e^{2};
E) e^{-2} .

$$$ 162.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{x}$

A) 2;
B) 1;
C) e;
D) e^{2};
E) e^{-2} .

$$$ 163. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$

A) 3/2;
B) 2/3;
C) 2;
D) 3;
E) 1.

$$$ 164. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+5}{7x^2+2x+8}$

A) 0;
B) 3 / 7;
C) 5 / 8;
D) ∞;
E) 1.

$$$ 165. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x+5}{7x^2+2x+8}$

A) 0;
B) 3 / 7;
C) 5 / 8;
D) ∞;
E) 1.

$$$ 166. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+5}{7x^5+2x+8}$

A) 0;
B) 3 / 7;
C) 5 / 8;
D) ∞;
E) 1.

$$$ 167. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

A) 0;
B) 3;
C) 6;
D) 9;
E) ∞.

$$$ 168. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

A) 4;
B) -4;
C) 0;
D) 2;
E) 1 / 4.

$$$ 169. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}$

A) 2;
B) 5;
C) 3;
D) 5 / 2;
E) 3 / 2.

$$$ 170.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

A) 3;
B) -3;
C) -2;
D) 2;
E) 1.

$$$ 171. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ - бұл . . .

A) Лагранж ережесі;
B) Лопиталь ережесі;
C) Ролль теоремасы;
D) Коши теоремасы;
E) Ферма теоремасы.

$$$ 172. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

A) 1 / 5;
B) 1;
C) 0;
D) 5;
E) ∞.

$$$ 173.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x^4}{3x^2+x^4}$

A) 1 / 3;
B) 1;
C) 3;
D) 4 / 3;
E) 3 / 4.

$$$ 174. z=f(x,y) функциясының y бойынша дербес өсімшесі:

A) $\Delta_y z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;
B) $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;
C) $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$;
D) $\Delta_x z = f(x, y-\Delta y) - f(x,y)$;
E) $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

$$$ 175. z=f(x,y) функциясының толық өсімшесі:

A) $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$;

B) $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;

C) $\Delta_y z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;

D) $\Delta_X z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$;
E) $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

$$$ 176. z=f(x,y) функциясының x аргументі бойынша дербес туындысы:
A) $z'_y = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$;
B) $z'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$;
C) $z'_x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$;
D) $z'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$;
E) dz=$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$$ 177. z=f(x,y) функциясының y аргументі бойынша дербес туындысы:
A) $z'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$;
B) $z'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$;
C) $z'_x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$;
D) $z'_y = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$;.
E) dz=$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$$ 178. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$
A) 1;
B) 0;
C) ∞;
D) ln a ;
E) a^x.

$$$ 179. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$
A) 1;
B) 0;
C) ∞;
D) x;
E) e .

$$$ 180. Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x} - 1}{x}$
A) 1;
B) 0;
C) ∞;
D) ln a ;
E) 2 ln a.

$$$ 181.Шектің мәнін тап : $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2 - a^2}{x - a}$
A) 0;
B) 2;
C) 2 a;
D) a;
E) a^2.

$$$ 182. Берілген $y'' - 4xy' + y = 0$ тендеуінің реті қандай?
A) бірінші ретті ;
B) екінші ретті;
C) үшінші ретті;
D) төртінші ретті;
E) бесінші ретті.

$$$ 183. $ydy + xdx = 0$ теңдеуінің жалпы интегралы.
A) $y^2 + x^2 = c$;
B) $xy = c$;
C) $x = y$;
D) $y + x = 0$;
E) $2x - y = 0$.

$$$ 184. Мына тендеулердің ішінен дифференциалдық теңдеуді табыңыз ?
A) $x^2 + 4x + 5 = 0$;

B) $y' \sin^2 x + 1 = 0$;

C) $\sin x + \cos x = 0$;

D) $\log_2(2x+1) = 0$;

E) $2^{x+1} = 1$.

$$$ 185. Шектің мәнін тап :

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+5}{4x^3+6x^2+7x+8}$

A) 4 ;

B) 5 / 8;

C) 2 / 3;

D) 1 / 4;

E) 3 / 7.

$$$ 186. Мына теңдеулердің ішінен дифференциалдық теңдеуді табыңыз ?

A) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

B) $\sin^2 x = 1$;

C) $\log_a x = 0$;

D) $3^{x-1} = 1$;

E) $xdy + ydx = 0$.

$$$ 187. Мына дифференциалдық теңдеулер ішінен екінші ретті теңдеуді табу керек.

A) $y'' + ky' - by - \sin x = 0$;

B) $y'x - x^2 - y = 0$;

C) $y' - 2xy^2 + 5 = 0$;

D) $x^2dy + y^2dx = 0$;

E) $y' = f(1; \frac{y}{x})$.

$$$ 188. $\int (x^4 - 3x^2 + x - 5)dx$ интегралын есепте .

A) $\frac{1}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$;

B) $\frac{1}{5}x \ - x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$;

C) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$;

D) $4x^3 - 6x + 1 + C$;

E) $x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + C$.

$$$ 189. $\int_0^1 2^x dx$ интегралын есепте .

A) $\frac{2}{\ln 2}$;

B) $\frac{3}{\ln 2}$;

C) $\frac{1}{\ln 2}$;

D) $\frac{4}{\ln 2}$;

E) 0 .

$$$ 190. z= f(x;y) функциясының толық дифференциалы неге тең ?

A) $z'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$;

B) $z'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$;

C) $z'_x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$;

D) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$;

E) $z'_y = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

$$$ 191. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ түріндегі теңдеуді қалай атаймыз ?

A) сызықтық теңдеу;

B) айнымалы шамалары ажыратыланатын;

C) біртекті теңдеу;

D) айнымалы шамалары ажыратылған;

E) Бернулли теңдеуі.

$$$ 192. $z = x^4 + 5x^2y - y^4 + 6$

Табу керек: z_x'-?

A) $4x^3+10xy$;

B) $4x^3-10xy$;

C) $4x^3+10xy - 4y^3$;

D) $10xy-4y^3$;

E) $4x^3+5x^2$.

$$$ 193. Егер $|a|=2, |в|=3$ және олардың арасындағы бұрыш 60^0 болса, онда осы векторлардың скалярлық көбейтіндісін тап.

A) $3\sqrt{3}$;
B) $3\sqrt{2}$;
C) 3 ;
D) -3 ;
E) $-3\sqrt{3}$.

$$$ 194. Интегралды есепте: $3\int_a^в x^2 \partial x$.

A) $6(в^3-a^3)$;
B) $a^3-в^3$;
C) $в^3-a^3$;
D) $3(в^3-a^3)$;
E) 6(а-в).

$$$ 195. $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ түріндегі теңдеуді қалай атаймыз ?

A) сызықтық теңдеу;
B) айнымалы шамалары ажыратыланатын;
C) біртекті теңдеу;
D) айнымалы шамалары ажыратылған;
E) Бернулли теңдеуі.

$$$ 196 Интегралды есепте: $\int \frac{7}{x+3}dx$

A) $7\ln|x-3|+C$;
B) $7\ln|x|+C$;
C) $\ln|x+3|+C$;
D) $7\ln|x+3|+C$;
E) $7\ln|x+3|$.

$$$ 197 $y^{'}=f(x)$ теңдеуінің жалпы шешімі қай түрде жазылады ?

A) $y=\int f(x)dx+c$;
B) $y=Cx$;
C) $y=Cx^2$;
D) $y=f(x)+c$;
E) $y=f(Cx)$.

$$$ 198 Интегралды есепте: $\int tgxdx$

A) $\ln|\cos x|+C$;
B) $-\ln|\cos x|+C$;
C) $\ln|\sin x|+C$;
D) $-\ln|\sin x|+C$;
E) $\ln|\cos x \sin x|$.

$$$ 199 Интегралды есепте: $\int_1^3 x^3dx$

A) 2 / 4;
B) 20;
C) 80;
D) 82;
E) 81 / 4.

$$$ 200. Интегралды есепте: $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

A) 2;
B) 6;
C) 4;
D) 8;
E) 10.

$$$ 201. Ньютон-Лейбниц формуласын тап.

A) $\int_a^в f(x)dx=F(b)-F(a)$;
B) $\int_a^в f(x)dx=F(a)-F(b)$;
C) $\int_a^в ud\vartheta=u\vartheta\Big|_a^b-\int_a^b \vartheta du$;
D) $\int_a^в f(x)dx=f(b)-f(a)$;
E) $\int_a^в f(x)dx=f(a)-f(a)$;

$$$ 202. Бөлшектеп интегралдау формуласын тап .

A) $\int udv = uv + \int vdu$;

B) $\int udv = uv - \int udv$;

C) $\int udv = uv - \int vdu$;

D) $\int udv = uv + \int udv$;

E) $\int udu = \int vdu - uv$.

$$$ 203. z = $x^5 + 4y^7 + 7xy^2$ Т/к: $z_y^/$-?

A) $5x^4 + 28y^6 + 14xy$;

B) $5x^4 + 7y^6$;

C) $5x^4 + 28y^6 + 7xy$;

D) $28y^6 + 14xy$;

E) $5x^4 + 14xy$.

$$$ 204. $y' = f(1; \frac{y}{x})$ түріндегі теңдеуі қалай аталады ?

A) біртекті теңдеу;

B) айнымалы шамалары ажыратыланатын;

C) сызықтық теңдеу;

D) айнымалы шамалары ажыратылған;

E) Бернулли теңдеуі.

$$$ 205. Егер M(x,y) және N(x,y) функциялары өлшемдері бірдей біртекті функциялар болса, онда $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ теңдеуі қалай аталады?

A) сызықтық;

B) Бернулли теңдеу;

C) біртекті теңдеуі;

D) толық дифференциалды;

E) айнымалы шамалары ажыратылған.

$$$ 206. Бірінші ретті біртекті теңдеуді шешу үшін қолданылатын алмастыру:

A) $y \cdot x = u$;

B) $y = u \cdot \vartheta$;

C) $y = e^x$;

D) $y = \sin nx + \cos x$;

E) $y = u \cdot x$.

$$$ 207. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ бұл . . . формуласы

A) Тейлор;

B) Маклорен;

C) Ньютон-Лейбниц;

D) Лопиталь;

E) Лагранж.

$$$208. Бірінші ретті сызықтық теңдеуді шешу үшін қолданылатын алмастыру қандай ?

A) $y = u \cdot x$;

B) $y = u \cdot \vartheta$;

C) $y = ax + b$;

D) $y \cdot x = u$;

E) $y = e^x$.

$$$ 209. Мына дифференциалдық теңдеулер ішінен сызықтық теңдеуді табу керек:

A) $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$;

B) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$;

C) $y' = f(1; \frac{y}{x})$;

D) $y + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$;

E) $M(x)dx + N(y)dy = 0$.

$$$ 210. Интегралды есепте:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

A) 0;

B) -1;

C) 1;

D) 2;

E) -2.

$$$ 211. Егер $f(x)-$жұп функция болса, онда $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ неге тең болады?

A) 0;

B) $\int_{0}^{a} f(x)dx;$

C) - $f(x);$

D) $2\int_{0}^{a} f(x)dx;$

E) $f(x).$

$$$ 212. Егер $f(x)$ -тақ функция болса, онда $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ неге тең болады?

A) 0;

B) $\int_{0}^{a} f(x)dx;$

C) - $f(x);$

D) $2\int_{0}^{a} f(x)dx;$

E) $f(x).$

$$$ 213. $y=e^x$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте.

A) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots;$

B) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots;$

C) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots;$

D) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots;$

E) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$.

$$$ 214. $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$ теңдеуін шешу керек :

A) x-y=C;

B) xy=C;

C) x+y=C ;

D) y= $\frac{x}{C}$;

E) y-xy=C.

$$$ 215. $\frac{dx}{\cos^2 x}-\frac{dy}{\sin^2 y}=0$ теңдеуін шешу керек:

A) $\sin^2 x-\cos^2 y=c$;

B) $\sin x-\cos y=c$;

C) $tgx+ctgy=c$;

D) $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin y}=c$;

E) $\sin x\cdot\cos y=c$.

$$$ 216. $\int(4x^3-15x^4)dx$ интегралын есепте.

A) $x^4 - 3x^5 + C$;

B) $x^4 - 3x^5$;

C) $12x^2 - 60x^3$;

D) $4x^4 - 15x^5$;

E) $4x^4 - 15x^5 + C$.

$$$217. $y'=e^{3x}$ теңдеуін шешу керек.

A) $y=3e^{3x}$;

B) $y=\frac{1}{3}e^{3x}+C$;

C) $y=-3e^{3x}+C$;

D) $y=e^{3x}+C$;

E) $y=e^{3x+C}$.

$$$ 218. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x}$ интегралын есепте.

A) 0;

B) e;

C) 1;

D)–1;

E) -e.

$$$ 219. $\int e^{5x}dx$ интегралын есепте.

A) $e^{5x}+C$;

B) e^{5x};

C) $\frac{1}{5}e^{x}$;

D) $\frac{1}{5}e^{5x}$;

E) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

$$$ 220. $\int\frac{dx}{2x+3}$ интегралын есепте.

A) $\ln|2x+3|+C$;

B) $\ln|2x+3|$;

C) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$;

D) $\frac{1}{3}\ln|2x+3|+C$;

E) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|$.

$$$ 221. $f(x)=\cos 3x$ функциясының алғашқы функциясын тап.

A) $F(x)=3tgx+C$;

B) $F(x)=\sin 3x+C$;

C) $F(x)=3\sin x+C$;

D) $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C$;

E) $F(x)=3\sin 3x+C$.

$$$ 222. $f(x)=\sin 4x$ функциясының алғашқы функциясын тап.

A) $F(x)=4\cos x+C$;

B) $F(x)=-4\cos x+C$;

C) $F(x)=\frac{1}{4}\cos x+C$;

D) $F(x)=-\frac{1}{4}\cos x+C$;

E) $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 4x+C$.

$$$ 223. $\int 11\sin x dx$ интегралын есепте.

A) $11\cos x+C$;

B) $-11\cos x+C$;

C) $11\cos x$;

D) $-11\cos x$;

E) 0.

$$$ 224. $\int\frac{5dx}{\sin^2 x}$ интегралын есепте.

A) $5ctgx+C$;

B) $\frac{1}{5}ctgx+C$;

C) $-5ctgx+C$;

D) $-\frac{1}{5}ctgx+C$;

E) $-5ctgx$.

$$$ 225. $\int f(x)dx$ анықталмаған интегралының туындысы неге тең ?

A) $f(x)dx$;

B) $F(x)$;

C) $F(x)+C$;

D) $f(x)$;

E) $f'(x)$.

$$$ 226. $\int f(x)dx$ анықталмаған интегралының дифференциалы неге тең ?

A) $f(x)dx$;

B) $F(x)$;

C) $F(x)+C$;

D) $f(x)$;

E) $f'(x)$.

$$$ 227. $y''+py'+qy=0$ біртекті 2-ретті тұрақты коэффициенттері бар теңдеудің y_1,y_2 сызықтық тәуелсіз дербес шешімдері болса, жалпы шешімі қалай жазылады?

A) $y=(y_1+y_2)(c_1+c_2)$;

B) y=$\frac{c_1 y_1}{c_2 y_2}$;

C) y=$c_1y_1+c_2y_2$;

D) y=$\frac{c_1+c_2}{y_1+y_2}$;

E) y=$\frac{y_1+y_2}{c_1+c_2}$.

$$$ 228. $y=2x, y=0, x=1$және x=2 сызықтарымен шектелген фигураның ауданын тап.

A) 5 кв. бірлік;
B) 4 кв. бірлік;
C) 2 кв. бірлік;
D) 1 кв. бірлік ;
E) 3 кв. бірлік.

$$$ 229. $\int_0^2 x^3dx$ интегралын есепте.

A) 2;
B) 4;
C) 8;
D) 16;
E) 32.

$$$ 230. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ интегралын есепте.

A) $\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C;$

B) $arctg\frac{x}{a}+C;$

C) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C;$

D) $\frac{1}{a}arctgx+C;$

E) $arctgx+C.$

$$$ 231. y''-7y'+12=0 теңдеуін шешу керек.

A) y=$C_1e^x+C_2e^{4x}$;
B) y=$C_1e^x+C_2e^{3x}$;
C) y=$C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$;
D) y=$C_1e^x\cos3x+C_2e^x\sin3x$;
E) y=$(C_1+C_2x)e^x$.

$$$ 232. $\int\frac{dx}{3x+5}$ интегралын есепте.

A) $\frac{1}{3}\ln|3x+5|;$

B) $\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C;$

C) $3\ln|3x+5|+C;$

D) $3\ln|3x+5|+C;$

E) $\ln|3x+5|+C.$

$$$ 233. $y'=f(x,y)$ түріндегі дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қалай жазылады ?

A) $y=\varphi(x,C)$;
B) $y=\ln x$;
C) $y=x^2$;
D) $y=\varphi(x)$;
E) $y=\sin(x+C)$.

$$$ 234. $\int a^{5x}dx$ интегралын есепте.

A) $a^{5x}\ln a+C;$

B) $\frac{a^{5x}}{\ln a}+C;$

C) $\frac{a^{5x}}{5\ln a}+C;$

D) $3\ln|3x+5|+C;$

E) $\ln|3x+5|+C.$

$$$235. $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$ теңдігімен не анықталады ?

A) анықталмаған интеграл;
B) алғашқы функция;
C) туынды;
D) анықталған интеграл;
E) дифференциал.

$$$ 236. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы.
A) қисық сызықты трапецияның ауданы;
B) айналу денесінің көлемі;
C) доғаның ұзындығы;
D) жазық фигураның ауырлық центрі;
E) жұмыс.

$$$ 237. Егер $f(x)$ функциясы үшін $f(-x)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда ол қандай функция болады ?
A) жұп функция;
B) тақ функция;
C) периодты функция;
D) шектелген функция;
E) жұп та емес, тақ та емес.

$$$ 238. Егер $f(x)$ функциясы үшін $f(-x)=-f(x)$ теңдігі орындалса, онда ол қандай функция болады ?
A) жұп функция;
B) тақ функция;
C) периодты функция;
D) шектелген функция;
E) жұп та емес, тақ та емес.

$$$ 239.Егер кез келген $T>0$ саны үшін $f(x+T)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда ол қандай функция болады ?
A) жұп функция;
B) тақ функция;
C) периодты функция;
D) шектелген функция;
E) жұп та емес, тақ та емес.

$$$ 240. Егер (a,b) функциясы үшін $f'(x)<0$ болса, онда ...
A) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта ойыс болады;
B) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта дөңес болады;
C) $f(x)$ функциясы осы аралықта өседі;
D) $f(x)$ функциясы осы аралықта кемиді;
E) $f(x)$ функциясының осы аралықта максимумы болады.

$$$ 241. Егер (a,b) функциясы үшін $f'(x)>0$ болса, онда . . .
A) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта ойыс болады;
B) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта дөңес болады;
C) $f(x)$ функциясы осы аралықта өседі;
D) $f(x)$ функциясы осы аралықта кемиді;
E) $f(x)$ функциясының осы аралықта максимумы болады.

$$$ 242. Егер (a,b) функциясы үшін $f''(x)<0$ болса, онда . . .
A) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта ойыс болады;
B) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта дөңес болады;
C) $f(x)$ функциясы осы аралықта өседі;
D) $f(x)$ функциясы осы аралықта кемиді;
E) $f(x)$ функциясының осы аралықта максимумы болады.

$$$ 243. Егер (a,b) функциясы үшін $f''(x)>0$ болса, онда . . .
A) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта ойыс болады;

B) $f(x)$ функциясының графигі осы аралықта дөңес болады;
C) $f(x)$ функциясы осы аралықта өседі;
D) $f(x)$ функциясы осы аралықта кемиді;
E) $f(x)$ функциясының осы аралықта максимумы болады.

$$$ 244. Функцияның үзіліссіздік қасиеттерін қабылдамайтын нүктелер қалай аталады ?
A) шекті нүктелер;
B) ішкі нүктелер;
C) экстремум нүктелер;
D) үзіліссіз нүктелер;
E) үзілісті нүктелер.

$$$ 245. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және (a,b) аралығында дифференциалданатын функция болса, онда осы аралықтан қандай да бірі $C \in (a,b)$ нүктесі табылып, $f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b-a)$ теңдігі орындалады.
A) Ролль теоремасы;
B) Коши теоремасы;
C) Лагранж теоремасы;
D) Лопиталь теоремасы;
E) Ферма теоремасы.

$$$ 246. $y = \cos 3x$ функциясының туындысын тап.
A) $-3\sin x$;
B) $-3\sin 3x$;
C) $-\sin 3x$;
D) $\sin 3x$;
E) $-3\sin 3x$.

$$$ 247. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі үзіліссіздік шарты.
A) $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = f(x_0)$;
B) $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$;
C) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
D) $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \Delta y = f(x_0)$;
E) $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \Delta y = 0$.

$$$ 248. $y = f(x)$ функциясының дифференциалы неге тең ?
A) $dy = f^{'}(x)$;
B) $dy = f(x)dx$;
C) $dx = f^{'}(x)dy$;
D) $dy = f^{'}(x)dx$;
E) $dy = dx$.

$$$ 249. $(\arcsin x)^{'} = ?$
A) $\frac{1}{1-x^2}$;
B) $\frac{1}{1+x^2}$;
C) $-\frac{1}{1+x^2}$;
D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
E) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$$ 250. $(arcctgx)^{'} = ?$
A) $\frac{1}{1-x^2}$;
B) $\frac{1}{1+x^2}$;
C) $-\frac{1}{1+x^2}$;
D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
E) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$$ 251. $y''+9y=0$ теңдеуін шешу керек.
A) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$;
B) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$;

C) y=cosx+sinx+C_1+C_2;
D) y=C_1sinx-C_2cosx ;
E) y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x} .

$$$ 252. $y = arctg5x$
функциясының туындысын тап.
A) $\frac{5}{1+x^2}$;
B) $\frac{1}{1+x^2}$;
C) $\frac{5}{1+5x^2}$;
D) $\frac{1}{1+25x^2}$;
E) $\frac{5}{1+25x^2}$.

$$$ 253. $\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = ?$
A) $\frac{u'\vartheta + \vartheta' u}{\vartheta^2}$;
B) $\frac{u'\vartheta - \vartheta' u}{u^2}$;
C) $\frac{u'\vartheta - \vartheta' u}{\vartheta^2}$;
D) $\frac{\vartheta^{\acute{y}} u - u^{\acute{y}}\vartheta}{\vartheta^2}$;
E) $\frac{u'\vartheta + \vartheta' u}{u^2}$.

$$$ 254. $x = x(t), y = y(t)$ табу
керек y'_x
A) $\frac{x'_t}{y'_t}$;
B) $\frac{y'_t}{x'_t}$;
C) $x'_t \cdot y'_t$;
D) $-\frac{x'_t}{y'_t}$;
E) $-\frac{y'_t}{x'_t}$.

$$$ 255. $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^3 \end{cases}$ табу керек y'_x.
A) $3t^2$;
B) 3;
C) $\frac{1}{t^2}$;
D) t^2;
E) $-t^2$.

$$$ 256. Бірінші ретті туындының механикалық мағынасы.
A) әсер етуші күш;
B) жылдамдық;
C) үдеу;
D) тарту күші;
E)вектор.

$$$ 257. Екінші ретті туындының механикалық мағынасы.
A) әсер етуші күш;
B) жылдамдық;
C) үдеу;
D) тарту күші;
E) вектор.

$$$ 258. $(\ln x)' = ?$
A) x;
B) $\frac{1}{\ln x}$;
C) $\frac{1}{x^2}$;
D) $\frac{1}{x}$;
E) о.

$$$ 259. $(tgx)' = ?$
A) $-\frac{1}{\cos^2 x}$;
B) $ctgx$;
C) $\sin^2 x$;

D) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

E) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$$ 260. $(ctgx)' = ?$

A) $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

B) tgx;

C) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

D) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

E) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$$ 261. $y = \ln(3x+5)$ функциясының туындысын тап.

A) $\dfrac{1}{3x+5}$;

B) $\dfrac{3}{3x+5}$;

C) $\dfrac{5}{3x+5}$;

D) $\dfrac{3}{x}$;

E) $\dfrac{1}{x}$.

$$$ 262. $ó = 2å^{3õ} - 7^{õ}$ функциясының туындысын тап.

A) $2e^{3x} - 7^x \ln 7$;

B) $2e^{3x} - 7^x \ln x$;

C) $6e^{3x} - 7^x$;

D) $6e^{3x} - 7^x \ln x$;

E) $6e^{3x} - 7^x \ln 7$.

$$$ 263. $ó = \dfrac{5õ+10}{õ-8}$ функциясының үзілісті нүктесін тап.

A) x = -2 ;

B) x = 0 ;

C) x = 8 ;

D) x = 2 ;

E) x = - 8 .

$$$ 264. y''-4y'+4y=0 теңдеуін шешу керек.

A) $y=C_1x+C_2e^x$;

B) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$;

C) $y=(C_1+C_2)e^{2x}$;

D) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$;

E) $y=e^{2x}$.

$$$ 265. $y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 7$ функциясының екінші ретті туындысын тап.

A) $6x^2 + 10x + 4$;

B) 12;

C) 12 x + 10;

D) $3x^2 + 2x + 4$;

E)6 x + 2.

$$$ 266. $ó = (2õ+5)^3$ функциясының дифференциалын тап.

A) $dy = 3(2x+5)^2 dx$;

B) $dy = 3(2x+5)^2$;

C) $dy = 6(2x+5)^2$;

D) $dy = 6(2x+5)^2 dx$;

E) $6(2x+5)^2$.

$$$ 267. $y = 2x^3 + 5x^2$ табу керек: d^2y.

A) 12 x + 10;

B) $(12õ+10)dx^2$;

C) $6x^2 + 10$;

D) $(6õ^2 + 10õ)dx^2$;

E) $(12x+10)dx$.

$$$ 268. $y = x^3 - 3x + 2$ функциясының кему аралығын тап.

A) $(-\infty;-1)(1;+\infty)$;

B) $(-\infty;-1)$;

C) $(1;+\infty)$;

D) $(-\infty;+\infty)$;

E) $(-1;1)$.

$$$ 269. $y = x^5 + 5x - 6$ функция графигінің ойыс аралықтарын тап.

A) $(-\infty;0)$;

B) $(-\infty;+\infty)$;

C) $(0;+\infty)$;

D) $(-\infty;-1)$;

E) $(-1;+\infty)$.

$$$ 270. $y = \frac{2x+7}{x^2-1}$ функциясының анықталу облысын тап.

A) $(-\infty;-1)(1;+\infty)$;

B) (- 1 ; 1) ;

C) $(-\infty;-1)(-1;+\infty)$;

D) $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$;

E) $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

$$$ 271. y = e ^{20x} функциясының туындысын тап.

A) 20 e ^{20x};

B) e ^{20x};

C) 20 e ^{x};

D) e ^{x};

E) $\frac{1}{20}\mathring{a}^{20\tilde{o}}$.

$$$ 272. $y = \ln e^x$ функциясының туындысын тап.

A) e ^{x};

B) $\frac{1}{e^x}$;;

C) 1 ;

D) $\frac{1}{x}$;

E) $\frac{1}{e}$.

$$$ 273. $y = \ln e^{x^2}$ функциясының туындысын тап.

A) e^{x^2}

B) $\frac{1}{e^{x^2}}$;

C) 1 ;

D) 2 x ;

E) $\frac{2x}{e^{x^2}}$.

$$$ 274. Нүкте түзу бойымен $S = 2t^3 + t^2 - 4$ заңы бойынша қозғалады. t = 2 с кезеңдегі нүктенің жылдамдығын тап.

A) 20 ;

B) 28 ;

C) 64 ;

D) 16 ;

E) 148.

$$$ 275. $y = \log_{\sqrt{3}} x$ функциясының туындысын тап.

A) $\frac{3}{2x\ln 2}$;

B) $\frac{x}{\ln 3}$;

C) $\frac{\sqrt{2}}{\tilde{o}\ln 3}$;

D) $\frac{2}{x\ln 3}$;

E) $\frac{1}{2x\ln 3}$.

$$$ 276. $y = x^9 - 3x^5 - \frac{3}{x^4} + 2$ функциясының туындысын тап.

A) $9x^8 - 15x^4 + 12x^{-5}$;

B) $9\tilde{o}^8 - 15\tilde{o}^4 - \frac{12}{\tilde{o}^4}$;

C) $9\tilde{o}^8 - 15\tilde{o}^4 - \frac{1}{\tilde{o}^3}$;

D) $9\tilde{o}^8 - 15\tilde{o}^4 - \frac{3}{4\tilde{o}^3}$;

E) $9\tilde{o}^8 - 15\tilde{o}^4 - \frac{3}{5\tilde{o}^5}$.

$$$ 277. $y = x^2 - 4x - 5$ функциясының өсу аралығын тап.

A) $(-\infty;-2)$;

B) $(-\infty;2)$;

C) $(-2;+\infty)$;

D) $(2+\infty)$;

E) $(-2;2)$.

$$$ 278. $y = x^2 - 4x - 5$ функциясының кему аралығын тап.

A) $(-\infty;-2)$;

B) $(-\infty;2)$;

C) $(-2;+\infty)$;

D) $(2+\infty)$;

E) $(-2;2)$.

$$$ 279. $y = x^2 - 4x - 5$ функциясының экстремум нүктесін тап.

A) $\tilde{o} = -2$ максимум нүктесі;

B) $\tilde{o} = -2$ минимум нүктесі;

C) $\tilde{o} = 2$ максимум нүктесі;

D) $\tilde{o} = 2$ минимум нуктесі;

E) $\tilde{o} = -1$ максимум нүктесі.

$$$ 280. $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ функциясының туындысын тап.

A) $-\cos x$;

B) $\sin x$;

C) 0;

D) 1;

E) $\sin 2x$.

$$$ 281. $\int_0^{\pi} \cos x dx$ интегралын есепте.

A) 1;

B) 0;

C) -1;

D) 2;

E) -2;

$$$ 282. $y = \cos^2 x$ функциясының туындысын тап.

A) $2\cos x$;

B) $2\sin x$;

C) $\sin 2x$;

D) $-\cos 2x$;

E) $-\sin 2x$.

$$$ 283. $y = x^3 - 3x$ функциясының кему аралығын тап.

A) $(-1;\infty)$;

B) $(1;\infty)$;

C) $(-\infty;-1)$;

D) $(-1;1)$;

E) $(-\infty;1)$.

$$$ 284. $y = 2x^3 - 3x^2 + 6$ функциясының $y'(1)$ мәнін тап.

A) 9;

B) 0;

C) -9;

D) 3;

E) -3.

$$$ 285. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ -- бұл $y = f(x)$ функциясының ....

A) туындысын;

B) шегі;

C) өсімшесі;

D) мәні;

E) интегралы.

$$$ 286. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ -- бұл $y = f(x)$ функциясының ....

A) туындысын;

B) шегі;

C) өсімшесі;

D) мәні;

E) интегралы.

$$$ 287. Әр түрлі сандық мән қабылдайтын кез келген шаманы ... деп атайды.

A) жиын;
B) функция;
C) тұрақты;
D) айнымалы;
E) тізбек.

$$$ 288. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түріндегі анықталмаған интегралды рационал функциясының интегралына келтіру үшін қандай универсал алмастыру қолданады ?

A) $\sin x = t;$
B) $tgx = t;$
C) $tg\frac{x}{2} = t;$
D) $\cos x = t;$
E) $ctg\frac{x}{2} = t.$

$$$ 289. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі анықталмаған интегралды есептеу үшін егер n оң бүтін тақ сан болса, онда қандай алмастыру қолданылады ?

A) $\sin x = t;$
B) $\cos x = t;$
C) $tg\tilde{o} = t;$
D) $ctgx = t;$
E) $\sin^m x = t.$

$$$ 290. Анықталмаған интегралдың анықтамасы.

A) $\int Rf(x)dx = R\int f(x)dx;$
B) $\int F(x)dx = f(x) + C$;
C) $\int f(x)dx = F(x)$;
D) $\int f(x)dx = F(x) + C$;
E) $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

$$$ 291. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ интегралын есепте.

A) $e^{\cos x} + C$;
B) $e^{\sin x} + C$;
C) $- e^{\cos x} + C$;
D) $- e^{\sin x} + C$;
E) $e^{x} + C$.

$$$ 292. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$ интегралын есепте.

A) $\frac{1}{9} arctg\frac{x}{9} + C;$
B) $arctg\frac{x}{9} + C;$
C) $arctg\frac{x}{3} + C$;
D) $\frac{1}{3} arctg\frac{x}{3} + C$;
E) $3 arctg\frac{x}{3} + C$.

$$$ 293. y = sin 2 x функциясының $y'(\frac{\pi}{4})$ мәнін тап.

A) 2 ;
B) -2 ;
C) 0 ;
D) 1;
E) -1 .

$$$ 294. $y = x^2 + 2x$ функциясының кризистік нүктесін тап.

A) x=0 ; x=2 ;
B) x=0 ;
C) x=-2 ;
D) x=0 ; x= -2
E) x= - 1.

$$$ 295. $y = x^2 + 2x$ функциясының өсу аралығын тап.

A) $(-\infty;-1);$
B) $(-1;+\infty);$
C) $(-\infty;0);$
D) $(0;+\infty);$
E) $(-2;+\infty).$

$$$ 296. y = $x^2 + 2x$
функциясының кему аралығын тап.

A) $(-\infty;-1)$;
B) $(-1;+\infty)$;
C) $(-\infty;0)$;
D) $(0;+\infty)$;
E) $(-2;+\infty)$.

$$$ 297. y = $x^2 + 2x$
функциясының графигінің ойыс аралығын тап.

A) $(-\infty;-1)$;
B) $(-1;+\infty)$;
C) $(-\infty;+\infty)$;
D) $(0;+\infty)$;
E) $(-\infty;0)$.

$$$ 298. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$
функциясының кему аралығын тап.

A) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$;
B) (-1 ;3);
C) $(-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$;
D) (1; -3);
E) $(-\infty;-3)$.

$$$ 299. $x = a\cos t$; $y = a\sin t$
параметрлік түрде берілген функцияның туындысын тап.

A) $ctgt$;
B) tgt ;
C) $-tgt$;
D) $-ctgt$;
E) $-a\sin t$; $a\cos t$.

$$$ 300. x = $t^3 + 3t + 1$; y = $3t^5 + 5t^3 + 1$ параметрлік түрде берілген функцияның туындысын тап.

A) $\frac{1}{5t^2}$;
B) $15t^4 + 15t^2$;
C) $3t^2 + 3$;
D) $5t^2$;
E) $-5t^2$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бугров Я.С., Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Ч. 1,2, 3. М., Наука, 2003.
4. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа.1977.
5. Шипачев В.С. Основы высшей математики. М., Высшая школа, 1989.
6. Минорский В.С. Сборник задач по высшей математике. М., Наука, 1977.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа,1978.
8. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғарғы математика курсы (Аналитикалық геометрия) Алматы, Санат, 1994.
9. Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А. Жоғарғы математика курсы (Сызықтық алгебра) Алматы, Санат, 1997.
10. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғарғы математика курсы (Математикалық анализ) Алматы, ҚазҰУ, 2002.
11. Саханов Н., Жаңбырбаев Б. Жоғары математика. Алматы, Қайнар, 1993.
12. Қазешев А.К. және т.б. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есепетр шығару. Алматы, 1996.
13. Кәкімов Ә. Ықтималдықтар теориясы. Алматы, РБК, 1996.
14. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978.
15. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.

Мазмұны

Пішімі 60х84 1/12
Көлемі 115 бет 9,6 шартты баспа табағы
Таралымы 20 дана.
Ш.Есенов атындағы КМТжИУ
Редакциялық - баспа бөлімінде басылды.
Ақтау қаласы, 32 ш/а.